Secundaria

MATEMÁTICA MENTE 3

CONSOLIDACIÓN DE COMPETENCIAS

ALTernativas

Alfonso Arriaga Coronilla
Susana Emilia Sesma Parra
Víctor Hugo Pineda Hernández
Gilberto Zavala Guzmán
Mónica Compañ García
José de Jesús Gutiérrez Palacios
José Gabriel Zahoul Retes

TERCER GRADO

APRENDER, SIEMPRE

PEARSON

Datos de catalogación

Autores: Arriaga Coronilla, Alfonso; Susana Emilia Sesma Parra; Víctor Hugo Pineda Hernández; Gilberto Zavala Guzmán; Mónica Compañ García; José de Jesús Gutiérrez Palacios; José Gabriel Zahoul Retes.

MatemáticaMente 3. Consolidación de competencias. Serie Alternativas.
Tercer grado, educación secundaria.

Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2015
ISBN SEP: 978-607-32-3285-2
ISBN: 978-607-32-3283-8

Área: Secundaria
Formato: 20.5 × 27 cm Páginas: 272

MatemáticaMente 3. Consolidación de competencias. Serie Alternativas

Texto del estudiante

El proyecto didáctico *MatemáticaMente 3. Consolidación de competencias. Serie Alternativas*, es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, S.A. de C.V., por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento pedagógico de Pearson Educación México, S.A. de C.V.

Especialistas en Matemáticas responsables de los contenidos y su revisión técnico-pedagógica:

Alfonso Arriaga Coronilla, Susana Emilia Sesma Parra, Víctor Hugo Pineda Hernández, Gilberto Zavala Guzmán, Mónica Compañ García, José de Jesús Gutiérrez Palacios, José Gabriel Zahoul Retes.

Dirección general: Sergio Fonseca ▪ **Dirección de innovación y servicios educativos:** Alan David Palau ▪ **Gerencia de contenidos y servicios editoriales:** Jorge Luis Íñiguez ▪ **Gerencia de arte y diseño:** Asbel Ramírez ▪ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván Álvarez ▪ **Especialista en contenidos de aprendizaje:** Yoselín Flores Zenteno ▪ **Evaluaciones PISA:** Pamela Villamil Sapién ▪ **Corrección de estilo y cuidado de la edición:** Cintia Betsabé Pérez Villanueva, Claudia Patricia Reynaga Machado y Esther Del Valle Padilla ▪ **Asistencia editorial**: Cintia Betsabé Pérez Villanueva ▪ **Diseño de interiores:** Mónica Galván ▪ **Diseño de portada:** equipo de arte y diseño K12 ▪ **Composición y diagramación:** José Javier de Aquino Blancarte ▪ **Ilustración:** Cristina Anguiano ▪ **Entradas de bloque:** Alejandro Arizmendi ▪ **Investigación iconográfica:** Cintia Betsabé Pérez Villanueva ▪ **Créditos iconográficos:** Glowimages: pp. 46, 58, 111. Pamela Castillo, Xóchitl Toral. Pearson Asset Library.

Contacto: soporte@pearson.com
Primera edición, 2015

ISBN : 978-607-32-3283-8
ISBN E-BOOK: 978-607-32-3251-7
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-3252-4
ISBN SEP: 978-607-32-3285-2

Avenida Antonio Dovalí Jaime #70
Torre B, Piso 6, Colonia Zedec Ed Plaza Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón, México, Distrito Federal, C. P. 01210

Impreso en México. Printed in Mexico.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 18 17 16 15

PEARSON

Cada día se incorporan en nuestra vida nuevos elementos derivados de investigaciones, experimentos, conocimientos, desarrollo y utilización de recursos tecnológicos. En el ámbito educativo, sucede lo mismo, principalmente, con mayor éxito en técnicas y tecnología, producto de los estudios acerca de cómo aprende el ser humano.

La experiencia que se vive al estudiar y aprender matemáticas en la escuela, puede traer como resultado el gusto o el rechazo de las actividades relacionadas con esta área del conocimiento. Al resolver mediante procedimientos propios los problemas que se van presentando, y escuchar los diversos planteamientos y argumentos que proponen otros, podemos desarrollar nuestra creatividad; así, en esta apertura a la diversidad de ideas también se aprende, el estudiante puede madurar más rápido y perfilarse como individuo responsable. Desde este punto de vista, la formación matemática permite a los individuos afrontar con mejores recursos, los problemas de la vida cotidiana.

La vida diaria nos enfrenta a nuevos retos personales que reclaman actitudes distintas ante el conocimiento matemático. Para resolverlos es indispensable hacer uso de técnicas y razonamientos cada vez más eficaces. Precisamente, la propuesta didáctica de esta obra pretende ofrecer a los estudiantes de tercer grado de secundaria diversas oportunidades para poner en práctica sus conocimientos y habilidades, así como abrir espacios para el desarrollo de habilidades intelectuales y reflexión.

Confiamos que al trabajar con este material los estudiantes alcancen mejores niveles de aprendizaje.

Los autores

Al alumno:

Como estudiante de esta y de cualquier disciplina te preparas con la finalidad de estar en mejores condiciones intelectuales para enfrentar los retos de la vida cotidiana.

En este libro, *MatemáticaMente 3. Consolidación de competencias*, tendrás la oportunidad de adquirir una formación que te permita resolver con mejores recursos las dificultades diarias, ya que en la actualidad, se requiere de ciudadanos que tengan una alta capacidad de respuesta ante los problemas que se van presentando, y sepan desempeñarse y relacionarse en un ambiente de pluralidad y apertura a las ideas de otros.

El principal propósito de esta obra es ser una alternativa de apoyo que propicie el desarrollo de procedimientos propios de pensamiento y resolución de problemas, que te ayude a tomar decisiones y promueva la utilización de las herramientas del pensamiento, la creatividad y la comunicación.

Pon especial interés en desarrollar las actividades propuestas por tu maestro y las de este libro; participa, busca la mejor manera de darles respuesta y discute con tus compañeros acerca de los procedimientos empleados. Con todo esto favorecerás la consolidación de tus competencias para esta asignatura y para la vida.

Recuerda que el aprendizaje de las matemáticas depende de la disposición e interés que tengas para aprovechar cada propuesta y conocimiento de esta rama del saber, por ello, acércate a tu profesor siempre que lo necesites. Al finalizar el curso contarás con más elementos para superarte como persona y para continuar con éxito tus estudios y tu vida.

Los autores

Al maestro:

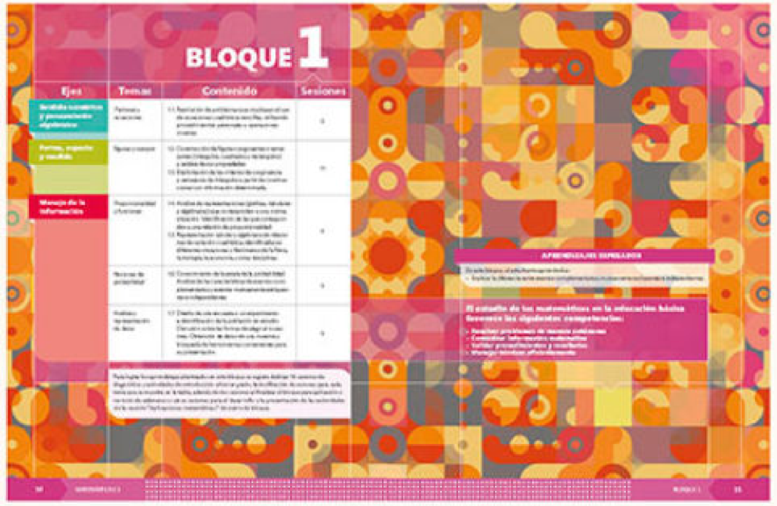
En la actualidad, los propósitos educativos están centrados en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, atender sus necesidades específicas y propiciar, mediante actividades acordes a sus intereses, que se desarrollen de manera competente para tener un mejor desempeño personal.

Por otro lado, nuestra sociedad requiere de la participación de todos, que se formulen propuestas de mejora y se pongan en práctica. En este sentido, la escuela adquiere especial relevancia porque en ella se desarrolla el potencial de los nuevos ciudadanos que se encargarán de proponer y llevar a cabo tan importante tarea. La labor del docente resulta entonces un factor clave, porque precisamente es quien se encuentra en contacto directo con los estudiantes, se encarga de generar ambientes propicios para el aprendizaje, plantea situaciones didácticas, los involucra en las tareas y promueve la construcción del conocimiento de los estudiantes por medio de competencias.

El propósito de las actividades contenidas en este libro es que, con su resolución, los estudiantes fortalezcan el desarrollo de las competencias matemáticas y los encamine hacia su consolidación. Para lo anterior, es conveniente promover el trabajo individual, en equipo y grupal. La interacción entre los alumnos fortalecerá la responsabilidad y la motivación para seguir aprendiendo. Es importante que en la organización del trabajo usted considere el intercambio de experiencias con los demás docentes, vinculen los contenidos y lleven a cabo un trabajo interdisciplinario; de esta manera, se favorecerá el desarrollo integral de los alumnos y posibilitará que se alcance uno de los principales propósitos de la educación: la formación de individuos autónomos, capaces de enfrentar con éxito los problemas de la vida y de aprender de manera permanente.

Los autores

Tu libro está dividido en bloques conformados por secuencias de actividades que te llevarán a alcanzar el aprendizaje esperado de cada contenido.

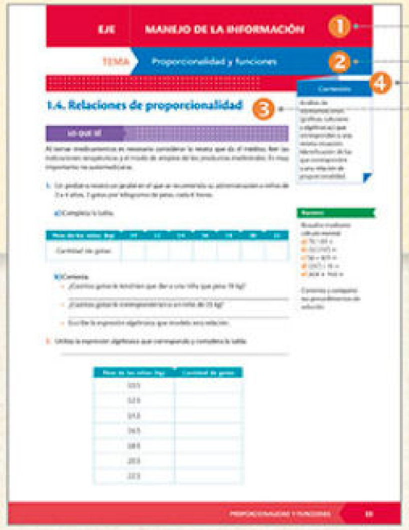


Entrada de bloque:

- Eje
- Tema
- Contenido
- Sesiones de trabajo sujeridas
- Aprendizajes esperados
- Competencias a desarrollar

Aprendizajes esperados
Los aprendizajes esperados señalan, de manera sintética, los conocimientos y las habilidades que se deben alcanzar como resultado del estudio de diversos contenidos distribuidos en varios bloques.

Competencias a desarrollar
Estos enunciados describen lo que sabrás, lo que serás capaz de hacer, la manera como responderás ante una situación y la disposición que tendrás para actuar ante un hecho.

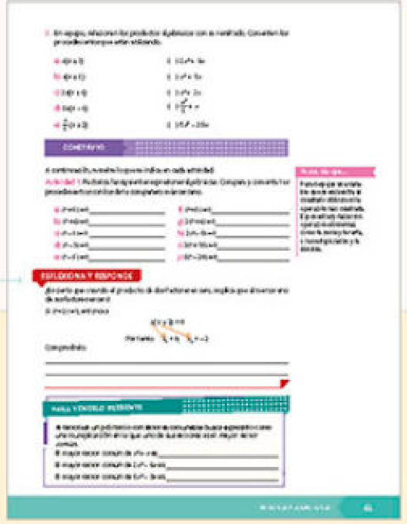


Estructura de la lección:

1. **Eje** Especifica cuál de los ejes temáticos se aborda.
2. **Tema** Señala a cuál de los seis temas corresponde el contenido a tratar.
3. **Número y título de lección** Describe de manera puntual el contenido en referencia.
4. **Contenido** Enuncia los conocimientos y las habilidades que los estudiantes van a desarrollar.

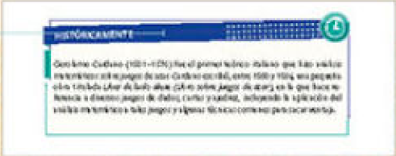
LO QUE SÉ
Esta es la primera sección de la secuencia. En ella, tu maestro y tú reconocerán lo que sabes para que lo uses como base para el nuevo aprendizaje.

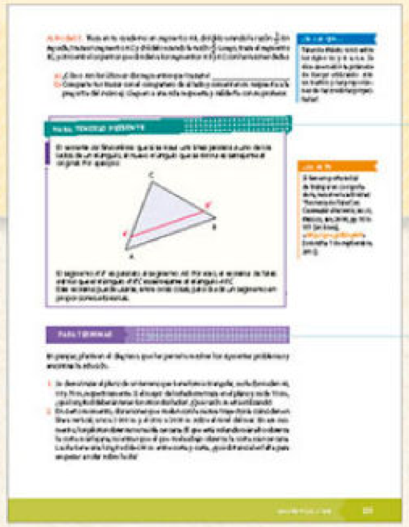
CONSTRUYO
En este espacio te proponemos actividades vinculadas con el contenido para que desarrolles las competencias matemáticas.



REFLEXIONA Y RESPONDE
Encontrarás preguntas relacionadas con el aprendizaje esperado de la lección, orientadas a fomentar el análisis y la reflexión acerca del tema estudiado.

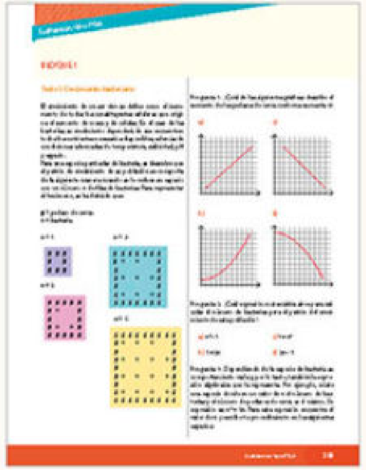
HISTÓRICAMENTE
Textos con datos históricos o personajes relevantes relacionados con el tema.





PARA TENERLO PRESENTE
Sección que contiene definiciones o conceptos con ejemplos, a fin de formalizar los nuevos conocimientos.

PARA TERMINAR
Para el cierre de la secuencia te proponemos actividades de aplicación y comprobación del conocimiento adquirido a través de un análisis de los procedimientos y conceptos estudiados.



EVALUÁNDOME
Sección de cierre de bloque que contiene una evaluación final para que tú y tu profesor determinen si alcanzaste los aprendizajes esperados. Además, podrás analizar tu avance y registrar las lecciones en las que vas bien o necesitas apoyo.

APLICACIONES MATEMÁTICAS
Te presentamos una situación en la que deberás proponer una alternativa de solución.
Para ello, necesitarás integrar los conocimientos adquiridos en el bloque, profundizar en el manejo de datos y comunicar información matemática.

Evaluación tipo PISA
Al final del libro encontrarás una evaluación tipo PISA por bloque para que evalúes tu avance en el desarrollo de las competencias matemáticas.

SECCIONES COMPLEMENTARIAS

Razono
Sección en la cual se desarrollan habilidades matemáticas, como el cálculo mental, la imaginación espacial, la generalización, el razonamiento lógico, etcétera.

Aplicación
Ejemplos acerca de situaciones en las que se aplican los contenidos en actividades de la vida diaria.

Usa las TIC
Sección con actividades sugeridas para aprovechar el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación.

Vinculación
Ejemplo de la utilización de las matemáticas en otras ciencias, el arte o la tecnología.

¿Sabías que...?
Nota breve que proporciona información que relaciona el contenido tratado con un dato curioso.

Investigo
Pequeñas actividades de investigación sobre temas relacionados con el contenido.

Recuerda que...
Contiene información o breves definiciones matemáticas como recordatorios.

Dosificación general de contenidos:

Para el logro de los propósitos planteados en este grado se propone la siguiente dosificación de sesiones para cada tema: 10 sesiones para diagnóstico y actividades de introducción al tercer grado, dos sesiones más al final de cada bloque para aplicación y revisión de exámenes; cinco sesiones para la realización y presentación de diversos productos donde se aplican los conocimientos derivados de los contenidos de cada bloque (Aplicaciones matemáticas) y 15 para repaso general y reforzamiento de fin de curso.

Eje	Tema	Número de sesiones				
		B1	B2	B3	B4	B5
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	5	9	5	4	4
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	11	10	13	4	
	Medida		9		10	11
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	6		9	5	5
	Nociones de probabilidad	3	5	5		5
	Análisis y representación de datos	3			4	

BLOQUE 1

Ejes	Temas	Contenido	Sesiones
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	1.1. Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	5
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	1.2. Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. 1.3. Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	11
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	1.4. Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. 1.5. Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	6
	Nociones de probabilidad	1.6. Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	3
	Análisis y representación de datos	1.7. Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	3

Para lograr los aprendizajes planteados en este bloque se sugiere dedicar 10 sesiones de diagnóstico y actividades de introducción al tercer grado, la dosificación de sesiones para cada tema que se muestra en la tabla, además de dos sesiones al finalizar el bloque para aplicación y revisión de exámenes y cinco sesiones para el desarrollo y la presentación de las actividades de la sección "Aplicaciones matemáticas" de cierre de bloque.

APRENDIZAJES ESPERADOS

En este bloque, el estudiante aprenderá a:

- Explicar la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

El estudio de las matemáticas en la educación básica favorece las siguientes competencias:

- **Resolver problemas de manera autónoma**
- **Comunicar información matemática**
- **Validar procedimientos y resultados**
- **Manejar técnicas eficientemente**

EJE **SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO**

TEMA **Patrones y ecuaciones**

Contenido

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

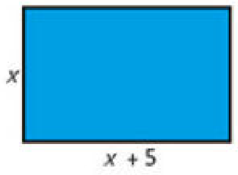
1.1. Problemas con ecuaciones cuadráticas sencillas

LO QUE SÉ

Reúnanse en equipo y contesten lo que se pide.

1. La casa de Carolina tiene un jardín de forma rectangular que ocupa un área de 72 m². El terreno está rodeado por bardas que requieren reparaciones, pero no tiene con qué medirlas y solo recuerda que el lado más largo mide el doble del ancho.

   a) Anoten la medida que le corresponde a cada lado del terreno usando una literal.
   b) En su cuaderno tracen el rectángulo indicando cada una de las medidas.
   c) Con los datos formulen una ecuación que relacione la medida de los lados y el área del terreno.
   d) Con ayuda de su profesor comparen sus resultados, comenten las diferencias y corrijan si fuera necesario.
   e) Completen la tabla.

Característica del terreno	Figura	Ecuación
El largo mide 5 m más que el ancho, con un área de 342 m².		$x(x+5)=342$ $x^2+5x=342$
Un rectángulo mide cuatro veces más de largo que de ancho. Se sabe que ocupa un área de 324 cm². Calculen sus medidas.		
La base de un triángulo rectángulo mide el triple que su altura. Calculen sus medidas, considerando que su área es de 24 cm².		

Razono

a) $7^2 + 6^2 =$
b) $6^2 - 5^2 =$
c) $8^2 - (4)(-6) =$
d) $(25)(8) =$
e) $36 \div -4 =$

¿Qué estrategias utilizaste? Coméntalas y compáralas con las de tus compañeros.

2. Considerando las especificaciones del jardín de Carolina, contesten.

   a) Si la literal seleccionada tuviera un valor de 5, ¿cuál sería el valor numérico del largo y del ancho del jardín? ____________
   b) Si la literal seleccionada tuviera un valor de 6, ¿cuál sería el valor numérico del largo y del ancho del jardín? ____________
   c) Si la literal seleccionada tuviera un valor de 7, ¿cuál sería el valor numérico del largo y del ancho del jardín? ____________
   d) ¿Cuáles de los incisos de la pregunta anterior cumplen con el área del jardín de Carolina? Compartan sus comentarios en equipo. Justifiquen su respuesta.

____
____

3. Calculen el factor que falta en cada uno de los siguientes incisos.

a) $2x^2 = 450$

$x^2 = \frac{450}{(\ \ )}$

$x = \sqrt{(\ \ )}$

$x = \pm 15$

b) $8x^2 = 1\,800$

$x^2 = \frac{(\ \ )}{8}$

$x = \sqrt{(\ \ )}$

$x = \pm 15$

PARA TENERLO PRESENTE

A partir de la raíz cuadrada de un número se obtienen dos resultados: uno positivo y el otro negativo.

REFLEXIONA Y RESPONDE

¿En qué son diferentes las ecuaciones de primer y segundo grado? Coméntalo con tus compañeros y profesor.

____

CONSTRUYO

Actividad 1. Inventen un texto breve para cada una de las siguientes ecuaciones en el que traduzcan las ecuaciones al lenguaje común. Compartan sus planteamientos.

a) $x^2 = 144$ ____________

b) $3y^2 = 75$ ____________

c) $a^2 + 8 = 44$ ____________

d) $\frac{m^2}{4} = 25$ ____________

Recuerda que...

La *operación inversa* es aquella que revierte los efectos de otra operación; por ejemplo, la suma y la resta son operaciones inversas.

Actividad 2. Un procedimiento de resolución de ecuaciones puede efectuarse por medio de operaciones inversas. Completa la información y revísala con un compañero.

a) La operación inversa de la adición es ______________________
b) La operación inversa de la multiplicación es ______________________
c) La operación inversa de elevar un número al cuadrado es ______________
d) Si una ecuación es de segundo grado, ¿cuál es el número máximo de soluciones distintas que puede tener? ______________________

Razono

¿La raíz cuadrada de un número siempre es positiva? ¿Cuántas soluciones tiene una raíz cuadrada? Argumenta tus respuestas.

Actividad 3. Completa la tabla usando operaciones inversas.

Ecuaciones	¿Cuál es el valor de la incógnita?
$x^2 = 144$	
$3y^2 = 75$	
$a^2 + 8 = 44$	
$\frac{m^2}{4} = 25$	

Aplicación

Isaac Newton planteó un algoritmo con el cual se puede desarrollar $(a + b)^n$, al ser n cualquier número entero positivo. A esto se le conoce como binomio de Newton, el cual una vez establecido permitió desarrollar binomios con prácticamente cualquier grado de dificultad de una manera sencilla.

PARA TENERLO PRESENTE

La *ecuación cuadrática* es aquella en la que hay un término que tiene la incógnita elevada al cuadrado. Las siguientes son ecuaciones cuadráticas:

$$2x^2 = 50 \qquad x(x+3) = -9 \qquad x^2 + 3x - 2 = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones. Por ejemplo: la ecuación $2x^2 = 50$ tiene dos soluciones: +5 y −5, porque al sustituir estos valores en el término que contiene la incognita en la ecuación y efectuar las operaciones se obtiene el 50.
Una manera de resolver ecuaciones cuadráticas es aplicando operaciones inversas. Otra forma es por ensayo y error.

Actividad 4. Reúnanse en equipos y relacionen con una línea las ecuaciones con sus soluciones. Consideren que hay más de una respuesta para cada ecuación. Al terminar, revisen sus respuestas con el grupo y profesor.

$x = -17$ | $x = -9$ | $x = -3$ | $(x - 5)^2 = 144$

$x^2 + x = 72$

$x = -10$ | El cuadrado de un número es 9. | $x = 8$

$x = 7$

Si al cuadrado de un número se le agrega una unidad, el resultado es la mitad de 100.

$x = 10$ | $x = -7$

El doble del cuadrado de un número es 200. | $x = 3$

$x^2 - x = 90$

Actividad 5. Calcula de manera individual el valor del número desconocido. Haz las operaciones en el recuadro blanco. Al finalizar, compara tus resultados con los del compañero más cercano. Comenten sus procedimientos de resolución.

a) $x^2 - 9 = 0$

d) $3x^2 - 243 = 0$

b) $2x^2 - 450 = 0$

e) $2x^2 - 18 = 0$

c) $8x^2 = 1\,800$

f) $5x^2 = 20$

Actividad 6. Encuentra el número al que se refiere cada ejercicio. Haz las operaciones en el recuadro blanco. Comparte tus procedimientos con el compañero de al lado y compárenlos.

a) La diferencia del cuadrado de un número y 5 es 20.

b) El cuadrado de la suma de un número y 4 es 100.

c) La cuarta parte del cuadrado de un número es 9.

d) Un número y su cuadrado suman 240.

e) El cuadrado de la suma de un número y 3 es 81.

f) La diferencia de un número y su cuadrado es 0.

g) El área de un cuadrado es 400 cm^2. ¿Cuánto miden sus lados?

h) La mitad del área de un cuadrado es 98 u^2. ¿Cuánto mide el cuadrado?

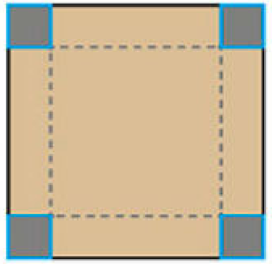
PARA TERMINAR

1. Resuelvan lo que se indica a continuación. Comparen sus respuestas con las de otro equipo e intercambien comentarios acerca de los procedimientos de resolución; corrijan lo que sea necesario. Inventen un problema que se pueda resolver con cada una de las siguientes ecuaciones, resuélvanlas y preséntenlas al grupo.

a) $n(n + 2) = 224$

b) $x^2 + x = 156$

2. Con una hoja cuadrada de cartón se debe armar una caja sin tapa. La base de la caja debe ocupar un área de 169 cm^2. Si la hoja mide 20 cm por lado:



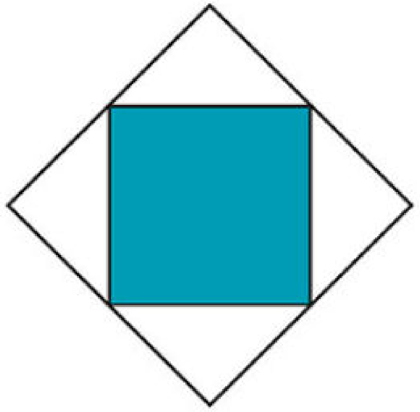
a) ¿Cuánto mide el área de cada cuadrado que se recorta en cada esquina?

b) Calcula el volumen de la caja.

c) ¿Cuántos milímetros debe medir el lado del cuadrado que se recorta en cada esquina para que la caja tenga el mayor volumen? ¿Cuánto mide ese volumen?

3. Construye en el siguiente espacio un triángulo isósceles cuya área mida 18 cm^2. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados iguales?

4. En la siguiente figura se observa que un cuadrado está inscrito en otro de mayor tamaño. Los vértices del cuadrado menor tocan el punto medio de los lados del mayor. El cuadrado mayor ocupa un área de 128 unidades cuadradas. Calcula la medida de los lados del cuadrado menor.



EJE FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

TEMA Figuras y cuerpos

Contenido

Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

1.2. Construcción y análisis de figuras congruentes

LO QUE SÉ

Lee con atención los planteamientos y responde lo que se indica.

1. Completa los siguientes enunciados.

a) $\frac{2}{5}$ ampliado tres veces nos da $\frac{6}{15}$. La razón entre razones es ____________.

b) $\frac{3}{7} = \frac{12}{x}$, al resolver la proporción, el valor de x es de ____________.

c) Si la medida de una variable se duplica proporcionalmente, la otra se ______.

d) Dos triángulos son iguales si sus lados correspondientes tienen ________.

2. Reúnanse en equipo y hagan lo que se les pide.

El tangram es un rompecabezas formado por siete piezas geométricas: 1 cuadrado, 1 paralelogramo y 5 triángulos de tres tamaños diferentes. Con estas piezas podemos formar figuras como el cuadrado de la izquierda.

a) Copien la figura en una cartulina blanca, iluminen las piezas y recórtenlas.
b) Determinen el área y el perímetro de cada pieza.

Figura	Lados	Área	Perímetro
Triángulo mayor			
Triángulo mediano			
Triángulo pequeño			
Cuadrado			
Romboide			

3. Observen que el tangram de la siguiente página tiene la misma forma que el anterior, pero es de mayor tamaño. Si los lados iguales del triángulo de la esquina superior derecha miden 2 cm y se necesita que midan 5 cm, calculen las medidas que debe tener cada una de las siete figuras del tangram y anótenlas en la tabla. Calculen también el área y el perímetro.

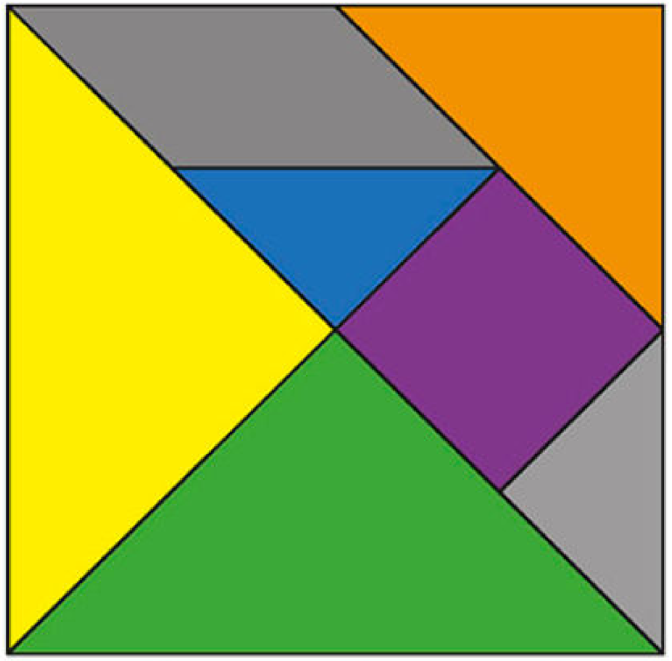


Figura	Lados	Área	Perímetro
Triángulo mayor			
Triángulo mediano			
Triángulo pequeño			
Cuadrado			
Romboide			

a) Sobrepongan el tangram que recortaron en el de esta página, ¿cómo son entre sí? Analicen con el grupo las figuras y comenten, ¿qué regularidad existe en las medidas de ambos tangram?
b) Comenten sus resultados, verifiquen similitudes y diferencias en la manera en que llegaron a sus respuestas. Discutan cómo mejorar su procedimiento.

CONSTRUYO

Resuelve lo que se indica a continuación.

Actividad 1. Organizados en equipo, elijan dos triángulos del tangram que recortaron que tengan la misma forma, pero diferente tamaño. Designen los ángulos de uno de los triángulos como *ABC* y los ángulos homólogos del otro como *A'B'C'*. Midan los lados de cada triángulo y completen las siguientes razones.

a) $\frac{AB}{A'B'}$ = ________ b) $\frac{BC}{B'C'}$ = ________ c) $\frac{AC}{A'C'}$ = ________

- Comparen y comenten sus resultados con otro equipo.

REFLEXIONA Y RESPONDE

¿Por qué se puede afirmar que son proporcionales los lados de los triángulos que tienen la misma forma? ______

______

Actividad 2. En equipo, resuelvan la siguiente situación y respondan.

a) Construyan dos triángulos de diferente tamaño, cuyos ángulos interiores A y B midan $A = 40°$ y $B = 60°$; en el otro triángulo, $A' = 40°$ y $B' = 60°$.

- ¿Cuánto mide el tercer ángulo de cada triángulo?

______

b) Midan cada uno de sus lados y sustituyan su medida en las razones siguientes.

- $\frac{AB}{A'B'} =$ ______
- $\frac{BC}{B'C'} =$ ______
- $\frac{AC}{A'C'} =$ ______

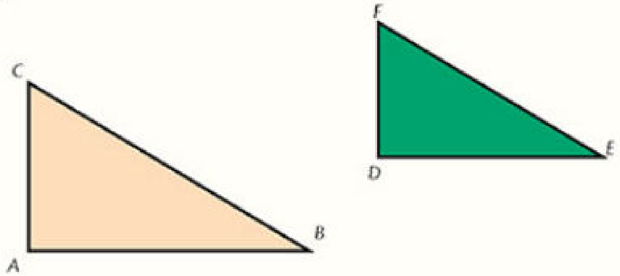
c) ¿Cómo resultan las razones? Concluyan entre todo el grupo. ______

d) ¿Qué características en común tienen estos dos triángulos? ______

______

PARA TENERLO PRESENTE

Cuando dos triángulos tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño, se dice que son *semejantes*. Por ejemplo, los triángulos cuyos vértices *A, B, C* y *D, E, F* son semejantes se expresa de la siguiente manera:

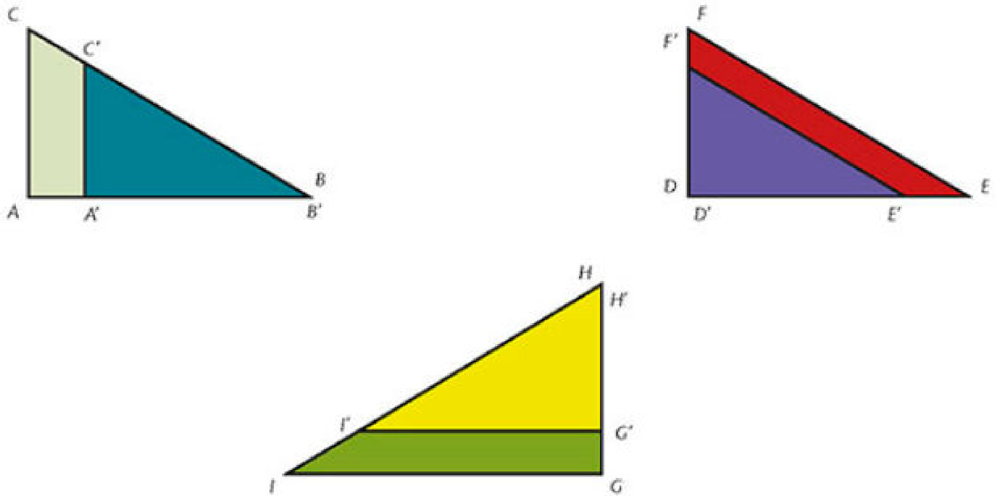


Las *figuras semejantes* cumplen con dos condiciones:

a) Sus ángulos correspondientes son congruentes (miden lo mismo).

b) Sus lados correspondientes son proporcionales.

Actividad 3. En las siguientes figuras se ha superpuesto una figura semejante sobre el triángulo original, haciendo coincidir, en cada caso, un vértice. Observa y contesta.



a) ¿Resultan paralelos los lados de los triángulos que se encuentran opuestos al ángulo común? Argumenta tu respuesta.

______

b) Si *AB* mide 7.4 cm; *BC*, 8.8 cm y *AC*, 4.8 cm, calcula la medida de los lados del triángulo *A'B'C'*; considera que *A'B'* mide 5.6 cm.

______

c) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad del triángulo *A'B'C'* en relación con el triángulo *ABC*?

______

d) Si los lados del triángulo escaleno *D'E'F'* miden 4.2 cm, 8.2 cm y 9.2 cm, respectivamente, y el lado *FD* mide 5.2 cm, calcula la medida de los otros dos lados del triángulo *DEF*.

______

e) ¿Cuál es la razón de proporcionalidad del triángulo *DEF* en relación con el triángulo *D'E'F'*?

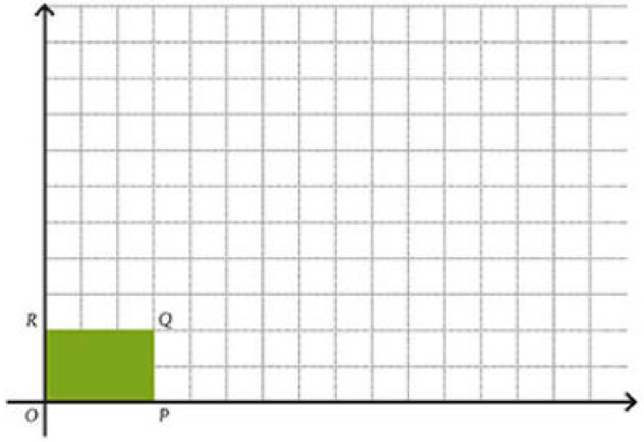
______

f) Si la razón de proporcionalidad de los triángulos *GHI* y *G'H'I'* es $\frac{3}{4}$, calcula la medida que falta a los lados de los triángulos, suponiendo que *GH* mide 6 cm; *G'I'*, 9 cm y *HI*, 12.9 cm.

______

g) En grupo, comenten acerca de los procedimientos que emplearon para resolver los ejercicios *c), d), e)* y *f)*. ¿Qué tuvieron en común sus procedimientos? ¿Existe uno que tenga alguna ventaja sobre los demás? Comenten sus respuestas y concluyan entre todos.

Actividad 4. Considera el rectángulo *OPQR* y construye en el siguiente plano los rectángulos que se indican en los incisos, dejando como vértice común el punto *O*.



a) Traza, con un color diferente, un rectángulo *OP'Q'R'* con una razón de semejanza en relación con el original. Calcula su perímetro y su área.

b) Traza, con otro color, un rectángulo *OP"Q"R"* con una razón de semejanza 2 en relación con el original.

c) Calcula el perímetro y el área del rectángulo *OP"Q"R"*, considera cada división de la gráfica como una unidad.

d) Traza, con un color diferente, un rectángulo *OP'''Q'''R'''* con una razón de semejanza 3 en relación con el original.

e) Calcula el perímetro y el área del rectángulo *OP'''Q'''R'''*.

f) Al hacer coincidir las figuras semejantes en un vértice común, ¿los vértices homólogos son colineales? Compruébalo.
- ¿Resultan proporcionales los lados homólogos de las figuras semejantes?
- ¿Qué propiedades tienen las figuras semejantes?

Actividad 5. Reúnanse en parejas y contesten las preguntas.

a) ¿Cuáles son las propiedades que tienen dos figuras semejantes en relación con sus lados homólogos?

b) ¿Cuáles son las propiedades que tienen dos figuras semejantes en relación con su perímetro?

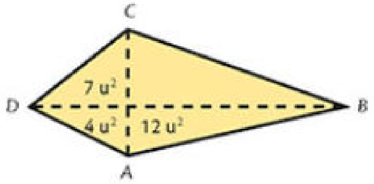
c) ¿Cuáles son las propiedades que tienen dos figuras semejantes en relación con su área?

- Comenten con el grupo sus respuestas.

PARA TERMINAR

Contesta lo que se indica a continuación. Comenta tus respuestas con el grupo y tu profesor.

1. Al trazar las diagonales, el cuadrilátero *ABCD* se dividió en cuatro partes, en tres de ellas se registró el área que ocupan. Calcula el área total del cuadrilátero.



2. Se tiene un cuadrado cuyos lados miden 4 cm y quiere construirse uno semejante con razón de proporcionalidad $\frac{1}{2}$. Calcula el perímetro y el área del cuadrado que se desea construir.

3. Se tiene un cuadrado cuyos lados miden 3 cm y se quiere construir otro semejante con razón de proporcionalidad 2. Calcula el perímetro y el área del cuadrado que se desea construir.

4. Se tiene un cuadrado cuyos lados miden 2 cm y se quiere construir otro semejante con razón de proporcionalidad 4. Traza las figuras en el espacio en blanco. Calcula el perímetro y el área del cuadrado que se desea construir.

5. Se quiere ampliar una fotografía que mide 8 cm de alto y 6 cm de base. Si la nueva fotografía debe medir 11 cm de alto, ¿qué área ocupa? ____________

Razono

Imagina que trazas un triángulo equilátero y uno de tus compañeros, un cuadrado. Casualmente, ambas figuras tienen el mismo perímetro. La suma de la medida de uno de los lados del triángulo y dos lados del cuadrado es 35. ¿Cuál es la diferencia de uno de los lados del triángulo y uno de los lados del cuadrado?

EJE FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

TEMA Figuras y cuerpos

Contenido

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Investigo

Investiga qué es un teodolito, para qué sirve y cómo se utiliza.

1.3. Criterios de congruencia y semejanza

LO QUE SÉ

Responde lo que se solicita enseguida.

1. Completa los espacios de la siguiente tabla.

Triángulo	Característica
Equilátero	Tiene tres lados ________. Tres ________ iguales. El ángulo mide ________.
Isósceles	Dos ________ iguales. Dos ángulos ________.
Escaleno	No hay ________ iguales. No hay ángulos ________.

2. Construye en el siguiente espacio un triángulo *ABC* cuyos ángulos interiores midan $A = 30°$, $B = 60°$ y $C = 90°$. Al terminar, compara tu triángulo con el que construyó el compañero más cercano.

Calca y recorta el triángulo y sobreponlo en el de otro compañero, de manera que coincida uno de los ángulos, por ejemplo, en el de 30° . Contesta junto con tu compañero las siguientes preguntas.

a) ¿El lado *BC* de tu triángulo resulta paralelo al *BC* del otro triángulo?

____

b) Si hacen coincidir un ángulo, ¿también resultan paralelos sus lados opuestos?

____

c) ¿Sucede lo mismo con los triángulos que trazaron los demás compañeros?

____

3. En tu cuaderno, traza un triángulo isósceles cuyos ángulos iguales midan 45°. Compáralo con el de alguno de tus compañeros y contesten
   a) ¿El lado *BC* de tu triángulo resulta paralelo al *BC* del otro triángulo?

   ____

   b) Si hacen coincidir un ángulo, ¿también resultan paralelos sus lados opuestos?

   ____

REFLEXIONA Y RESPONDE

Al hacer coincidir ángulos iguales, ¿cómo resultan los lados homólogos de los triángulos? ¿Sucederá lo mismo al comparar dos o más triángulos equiláteros?

____

____

CONSTRUYO

Lee los siguientes planteamientos y responde lo que se solicita.

Actividad 1. Traza, en tu cuaderno, triángulos con las medidas de segmentos que se indican en los incisos.

a) Segmentos: 4 cm, 4 cm y 4 cm
b) Segmentos: 4 cm, 5 cm y 6 cm
c) Segmentos: 3 cm, 3 cm y 6 cm
d) Segmentos: 3 cm, 4 cm y 8 cm
e) Segmentos: 2 cm, 8 cm y 9 cm
f) ¿En todos los casos se pudo construir el triángulo? ______________

¿Por qué? ______________________________

g) ¿Qué condiciones deben cumplir las medidas de tres segmentos para formar un triángulo? ______________________________

- Compara tus respuestas con las de un compañero.

Actividad 2. Mide los siguientes segmentos. En tu cuaderno, forma con estos dos lados que se dan, un triángulo, de acuerdo con el ángulo que se solicita en cada inciso; averigua cuánto mide el tercer lado. Al finalizar, compara tus trazos con los de un compañero.

a) Que entre los segmentos se forme un ángulo de 60°.
b) Que entre los segmentos se forme un ángulo de 45°.
c) Que entre los segmentos se forme un ángulo de 90°.
d) ¿Resultan congruentes los triángulos en cada caso?

____

Recuerda que...

Una de las maneras más precisas de medir segmentos es con el compás.

e) Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos de sus lados y ______

____

- Compartan sus respuestas y procedimientos.

Investigo

Investiga qué son la proporción áurea y la espiral de Fibonacci. Analiza qué relación existe entre la semejanza y la congruencia y los elementos que investigues.

PARA TENERLO PRESENTE

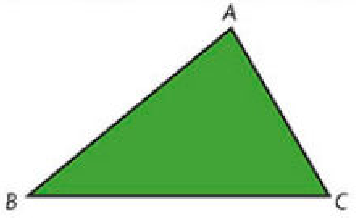
Para tener la certeza de que dos triángulos son semejantes es necesario que cumplan alguno de los siguiente enunciados, conocidos como *criterios de congruencia de triángulos*:

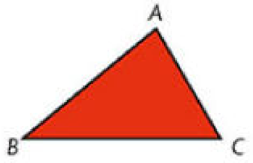
1. Que los tres lados de uno sean proporcionales a los tres lados del otro; este es el *criterio* LLL.
2. Que dos ángulos de uno de ellos sean iguales a dos ángulos del otro y el lado comprendido entre ellos; este es el *criterio* ALA.
3. Que dos lados de uno sean proporcionales a dos lados del otro y el ángulo comprendido entre estos lados sea igual; este es el *criterio* LAL.

REFLEXIONA Y RESPONDE

Si conocemos los tres ángulos de un triángulo y desconocemos las medidas de sus lados, ¿será suficiente información para asegurar que se forman triángulos congruentes? Coméntalo con tus compañeros y profesor y concluyan juntos.

Actividad 3. Observa las siguientes figuras. Mide sus ángulos con ayuda de un transportador y contesta, ¿cuánto miden los ángulos de cada triángulo?





A = ____________ A = ____________
B = ____________ B = ____________
C = ____________ C = ____________

- Comenten en grupo sus hallazgos.

¿Sabías que...

La posición de dos o más figuras no determina su igualdad?

PARA TENERLO PRESENTE

Dos triángulos semejantes tienen sus ángulos iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. Al cociente de la razón entre la medida de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes se le llama *razón de semejanza*.

Actividad 4. En la siguiente tabla se presentan diferentes medidas de un triángulo. Encuentra en cada caso si puedes construir un triángulo diferente al anterior.

Triángulo	A	B	C	a	b	c	Sí/No Justifica tu respuesta
1	6	10	14				
2	6		14		38.21°		
3	6		14			120°	
4		10		21.79°		120°	
5			14	21.79°		120°	
6				21.79°	38.21°		

Actividad 5. Hasta el momento hemos probado dos casos de congruencia: uno en el que son congruentes sus tres lados (*LLL*) y otro en el que son congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (*LAL*). ¿Existirá otro caso de congruencia entre dos triángulos? Sugiere alguno y compruébalo en tu cuaderno. Al terminar, revisa tu procedimiento con el profesor.

Usa las TIC

Si tienes oportunidad de trabajar en computadora, desarrolla la actividad "Áreas compuestas" para que practiques. http://goo.gl/LP2j7g (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Actividad 6. En tu cuaderno, traza los triángulos cuyos datos se dan en cada inciso y compara tus resultados con los de alguno de tus compañeros para probar si dada la congruencia de un lado y los ángulos adyacentes que forman un triángulo, es posible afirmar que dos triángulos son congruentes.

a) Un segmento de 5 cm y dos ángulos adyacentes de 30° y 60°.
b) Un segmento de 6 cm y dos ángulos adyacentes de 45° y 30°.
c) Un segmento de 5 cm y dos ángulos adyacentes de 60° y 45°.
d) Un segmento de 6 cm y dos ángulos adyacentes de 30° y 30°.

Actividad 7. Para cada uno de los siguientes incisos, propongan en grupo las medidas para el criterio de congruencia entre triángulos y trácenlos en su cuaderno para comprobarlo.

a) Criterio *LLL*
Segmentos: ______________________________
Ángulos: ______________________________

b) Criterio *LAL*
Segmentos: ______________________________
Ángulo: ______________________________

c) Criterio *ALA*
Segmento: ______________________________
Ángulos: ______________________________

Aplicación

La *congruencia* y la *semejanza* son características que han sido estudiadas por los geómetras de todas las épocas, porque al no poder trazar o construir figuras enormes, estudiaban las figuras congruentes y semejantes y el resultado obtenido era el mismo en ambos casos. Muchos edificios fueron diseñados de esta manera.

Aplicación

Con base en la sombra que proyecta un edificio sobre el piso y construyendo un triángulo semejante al formado por el edificio, la sombra y la distancia de la punta del edificio a la punta de la sombra, podemos medir indirectamente la altura del edificio fácilmente. Los ingenieros utilizan aparatos precisos para hacer estas mediciones.

PARA TERMINAR

Responde lo que se solicita en cada planteamiento.

1. Completa la información.
   a) Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos de sus ángulos y ____
   ______________________________.
   b) Si las figuras tienen la misma forma, pero no son congruentes, entonces se dice que son ______________________________
   ______________________________.
   c) Se puede afirmar que dos triángulos equiláteros son congruentes cuando ____
   ______________________________.
   d) Se puede afirmar que dos pentágonos regulares son congruentes cuando ____
   ______________________________.

2. Reúnanse en equipos. Tracen cada uno un segmento de cualquier medida y construyan sobre él un triángulo equilátero. Compárenlo con el que trazaron los compañeros de equipo y contesten.
   a) ¿Todos los triángulos tienen la misma forma?
   ____
   b) ¿Todos los triángulos resultaron congruentes?
   ____
   c) ¿Todos los triángulos equiláteros son semejantes?
   ____
   d) Si dos figuras semejantes son proporcionales, ¿cuál es la razón de proporcionalidad que tienen dos figuras congruentes?
   ____
   e) ¿Todos los cuadrados son semejantes?
   ____
   f) ¿Cuándo se puede afirmar que dos cuadrados son congruentes?
   ____
   g) ¿Todos los rectángulos son semejantes?
   ____
   h) ¿Cuándo se puede afirmar que dos rectángulos son congruentes?
   ____
   i) ¿Todos los pentágonos regulares son semejantes?
   ____

3. Un árbol de 14 m de altura próximo a un edificio proyecta una sombra de 24 m a la misma hora. Determina:
   - La altura del edificio si su sombra es de 45 m.
   - La sombra que refleja el edificio, si su altura es de 65 m.

   Resuelve el problema en tu cuaderno. Comenta con tu grupo los procedimientos empleados.

1.4. Relaciones de proporcionalidad

Contenido

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

LO QUE SÉ

Lee con atención el siguiente planteamiento y responde lo que se solicita.

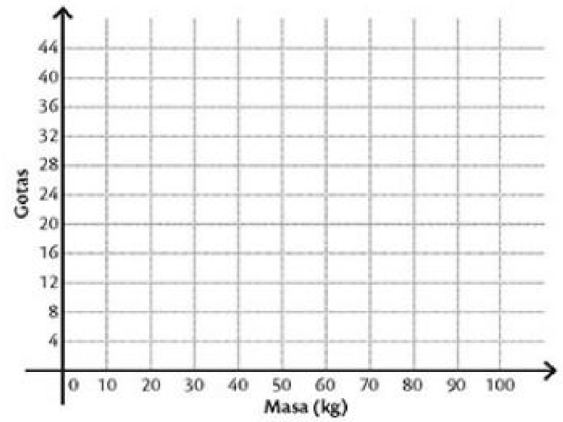
1. Un pediatra recetó un jarabe del que se recomienda administrar a niños de 2 a 6 años de edad 2 gotas por kilogramo de masa, cada 6 horas. En términos algebraicos, eso corresponde a cantidad de gotas = 2 × masa.

   a) Utiliza la expresión algebraica anterior y completa la tabla.

Masa de los niños (kg)	10	12	14	16	18	20	22
Cantidad de gotas							

   b) Contesta.
   - ¿Cuántas gotas le tendrían que dar a una niña que pesa 19 kg?
   ____
   - ¿Cuántas gotas le corresponderían a un niño de 23 kg?
   ____

2. Considera los datos de la tabla del punto anterior y elabora una gráfica que muestre la relación entre la masa de los niños y la cantidad de gotas por administrar. Al terminar, compara tu gráfica con la del compañero más cercano, comenten acerca de su elaboración y cómo se leen los datos representados.



Razono

Resuelve mediante cálculo mental.

a) $75 - 61 =$
b) $(5)(13^2) =$
c) $56 + 621 =$
d) $15^2 \div 15 =$
e) $36.8 + 14.6 =$

Comenta y comparte tus procedimientos de solución.

Aplicación

En la bolsa de valores se generan millones de datos todos los días y los analistas deben tomar decisiones que pueden costar mucho dinero, en cuestión de segundos. Si esta información se presenta en forma de gráficas es más ilustrativa que verla en tablas o en una ecuación.

CONSTRUYO

En plenaria y con la ayuda de tu profesor, resuelvan lo que se pide.

Actividad 1. Las carreras de automóviles surgieron aproximadamente en julio de 1894 en París, Francia, y fue en 1899 cuando se alcanzó la velocidad de 100 km/h.

La siguiente tabla muestra las marcas mundiales de velocidad más relevantes en la historia.

Año	Velocidad alcanzada	Piloto
1909	200 km/h	Víctor Hermey
1932	400 km/h	Malcolm Campbell
1947	634 km/h	John Cobb
1964	648 km/h	Donald Campbell
1965	966 571 km/h	Craig Breedlove
1970	1 001 667 km/h	Gary Gabelich

a) Considerando la velocidad de cada piloto, completa con la respectiva expresión algebraica la tabla siguiente. Considera que la distancia recorrida se expresa en kilómetros (km) y el tiempo en horas (h).

Corredor	Expresión Algebraica
Víctor Hermey	km = 200 h
Malcolm Campbell	
John Cobb	
Donald Campbell	
Craig Breedlove	km = (966.571 km/h)(h)
Gary Gabelich	

b) Utilizando las expresiones algebraicas correspondientes, completa la siguiente tabla, con la distancia recorrida por cada piloto.

Distancia recorrida						
Corredor	1 h	2 h	3 h	4 h	5 h	6 h
Víctor Hermey		400 km				
Malcolm Campbell						
John Cobb						
Donald Campbell			1 944 km			
Craig Breedlove						
Gary Gabelich						

c) Con los datos de la tabla anterior, grafica el recorrido de cada uno de los pilotos. Utiliza papel milimétrico y representa cada uno de los recorridos con un color diferente. Coloca en el eje de las abscisas el tiempo (horas) y en el de las ordenadas, la distancia (km). Expón tus resultados al grupo.

d) ¿Qué diferencia observas en las gráficas de cada uno? ________________

e) ¿Quién es el piloto más veloz y quién es el más lento? ________________

f) Considerando la velocidad alcanzada, ¿qué distancia recorrería cada uno en dos horas y media?

- Víctor Hermey ________________
- Donald Campbell ________________
- Malcolm Campbell ________________
- Craig Breedlove ________________
- John Cobb ________________
- Gary Gabelich ________________

g) Al terminar, compartan sus resultados con el resto del grupo. Si encontraron diferencias, coméntenlas y determinen cuáles son equivalentes y cuáles incorrectas.

Actividad 2. En la localidad donde vive José, la guardería Los canguros cobra $600 mensuales por derecho a estancia, mientras que El castillito cobra $850 mensuales.

Guardería Los canguros	
Meses de estancia	Pago por estancia
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Guardería El castillito	
Meses de estancia	Pago por estancia
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

a) A los cuatro meses de estancia, ¿cuál es la diferencia total en el pago entre una y otra guardería? ______

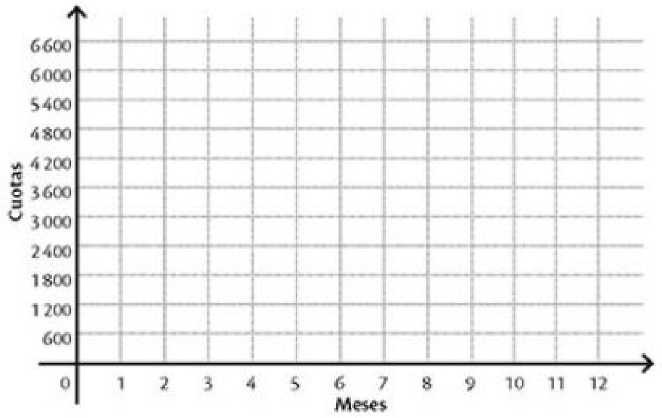
b) ¿De cuánto dinero es la diferencia entre una y otra al pagar un semestre? ______

c) Escribe la expresión algebraica que modela el pago total de mensualidades en esas guarderías. ______

d) Elaboren la gráfica y designen un color para cada guardería.

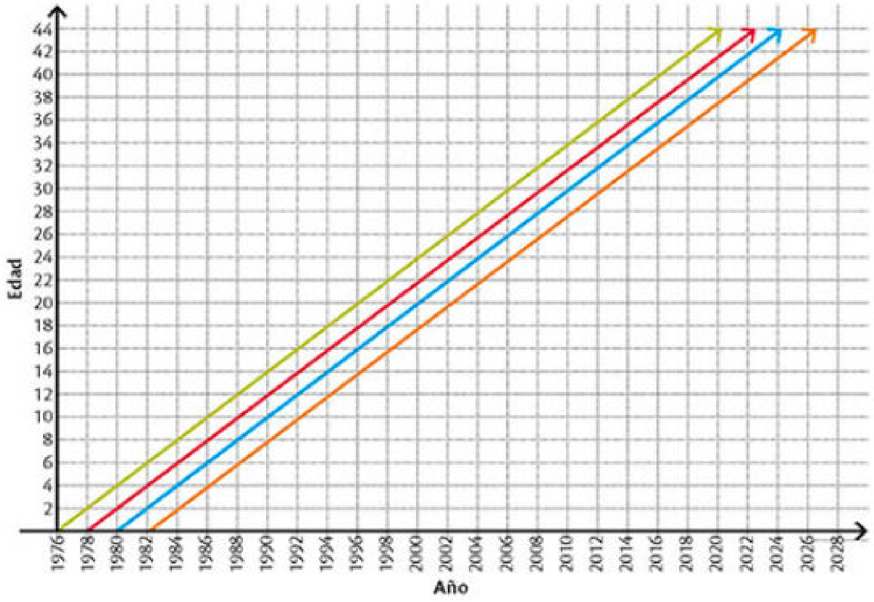
Investigo

Investiga de dónde proviene el plano cartesiano, que es aquel en el que trazamos gráficas.



e) ¿Qué diferencia existe entre las gráficas para cada guardería?

Actividad 3. Observen la gráfica, en ella se muestra el avance en las edades de 4 hermanos.



Carmen nació en 1976, Frida en 1978, Rubén en 1980 y Jazmín en 1982.

a) De acuerdo con el color de las rectas de la gráfica, ¿cuál corresponde a cada hermano? ______

b) Cuando Carmen cumplió 15 años, ¿cuántos años tenía Rubén? ______

c) ¿Cuántos años tendrá Jazmín cuando Mónica tenga 40 años? ______

d) ¿En qué año tendrá Frida 50 años? ______

e) Tabula las edades de cada uno de los hermanos.

Año	Carmen	Frida	Rubén	Jazmín
1980	4	2		
1985	9			
1990				
1995				
2000				
2005				
2010				
2015				

e) Escribe la expresión algebraica que sirve para encontrar la edad de los cuatro hermanos menores respecto a la de Carmen.

- Carmen: ______
- Frida: ______
- Rubén: ______
- Jazmín: ______

f) ¿Qué diferencia existe entre las gráficas para la edad de cada hermano?

Investigo

Investiga acerca del incremento aplicado al costo de la gasolina en nuestro país en los últimos dos años. Tabula el precio por litro y traza en tu cuaderno una gráfica que lo represente. Analiza, ¿la relación es proporcional? Justifica tu respuesta.

PARA TENERLO PRESENTE

Una *relación de proporcionalidad* es aquella en la que una variable es igual al producto de otra variable y una constante de proporcionalidad. Por ejemplo:

distancia recorrida = velocidad × tiempo

En este ejemplo, las variables son la distancia recorrida y el tiempo; la constante de proporcionalidad es la velocidad.
La gráfica de una relación de proporcionalidad es una línea recta que pasa por el origen.

Aplicación

La ley de Hooke establece una relación de proporcionalidad, entre la deformación de un material elástico y la fuerza que se le aplica. Esta ley debe ser tomada en cuenta para estructuras tan complejas como los rascacielos, para asegurar que su peso no provoque deformaciones significativas en la superficie.

PARA TERMINAR

1. Considerando los planteamientos y la resolución aplicada en las actividades pasadas, resuelve lo siguiente y contesta lo que se te pide.

   a) La fuerza necesaria para comprimir cierto resorte está dada por la relación:

   $$\text{Fuerza} = 3(\text{distancia comprimida})$$

   En tu cuaderno, elabora una tabla con la fuerza necesaria para comprimir el resorte en distintas longitudes. Al terminar elabora en la siguiente cuadrícula una gráfica en la que representes los datos de dicha tabla.

   b) La energía potencial que almacena ese mismo resorte al ser comprimido está dada por la siguiente ecuación:

   $$\text{Energía Potencial} = 1.5(\text{distancia comprimido})^2$$

   Ahora, elabora una tabla y una gráfica similares a las del inciso anterior.

   c) ¿Qué diferencia existe entre las gráficas de los incisos *a)* y *b)*?

   d) ¿Qué elementos podemos analizar para determinar si se trata de relaciones de proporcionalidad?

2. Regresa a las actividades de la sección anterior, y determina junto con tus compañeros si se trata de relaciones de proporcionalidad.

1.5. Relaciones de variación cuadrática

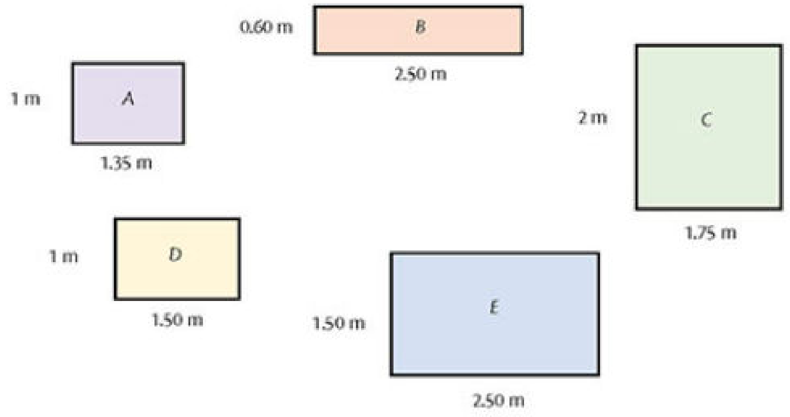
Contenido

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

LO QUE SÉ

Responde lo que se indica a continuación.

1. En el taller Estrella la impresión de lona vinílica se ofrece a $92 el metro cuadrado. La Escuela Secundaria Nezahualcóyotl necesita 5 lonas de diferentes tamaños para conmemorar el día de la raza. Estas son las medidas.



   a) ¿Cuál de ellas costará más? ____________
   ¿Por qué? ____________

   b) ¿Cuál será la que menos cueste? ____________

   c) ¿Cuál es la diferencia en el costo de las lonas *B* y *D*? ____________
   ¿Por qué? ____________

2. Observa la tabla de precios del taller.

m^2	1	2	3	4	5	6	7	8
Precio ($)		184	276	368	460	552	644	736

   a) ¿Qué expresión algebraica modela esta situación? ____________

   b) Elabora la tabla de costos para las lonas vinílicas que necesita la escuela.

Razono

Resuelve mediante cálculo mental.

a) $12^2 - 63 =$
b) $(50)(6^2) =$
c) $32 + 121 =$
d) $20^2 \div 4 =$
e) $(25.4)(5) =$

¿Qué procedimientos utilizaste? ¿Se parecen a los de tus compañeros? Comenten las similitudes y diferencias. ¿Cuáles consideran las opciones más adecuadas y por qué?

Lona	A	B	C	D	E
m^2					
Precio ($)					

Investigo

Investiga cuál es la expresión matemática de la gravitación universal de Newton y además compárala con la expresión de fuerza eléctrica a la que llegó Charles Coulomb. ¿Cuál es la semejanza entre ambas expresiones?

c) ¿El costo de la lona es proporcional a su superficie? ____________

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ____________

e) En este mismo taller, el precio de la manta es de $54 el metro cuadrado. ¿Cuánto se ahorrarían si las encargan de ese material? ____________

CONSTRUYO

Resuelve el siguiente problema. Al terminar, comenta tus respuestas y procedimientos con tus compañeros y profesor.

Actividad 1. Para el festival de día de las madres, en la Escuela Secundaria Nezahualcóyotl se decidió encargar a taller Estrella una lona vinílica cuadrada.

a) ¿Cuál será el costo de la lona si mide 4 m de lado?

b) Escribe la expresión algebraica que relaciona el precio de una lona cuadrada con el tamaño de uno de sus lados.

c) Completa la tabla usando la expresión algebraica anterior.

Medida del lado (m)	Precio ($)
1	
2	
3	
4	
5	

d) Grafica en tu cuaderno los datos de la tabla anterior y analiza, ¿se trata de una relación de proporcionalidad? Argumenta tu respuesta. ____________

e) ¿Qué pasaría con el precio si el tamaño del lado de la lona midiera el doble? ¿Qué pasa si el tamaño del lado midiera el triple? ____________

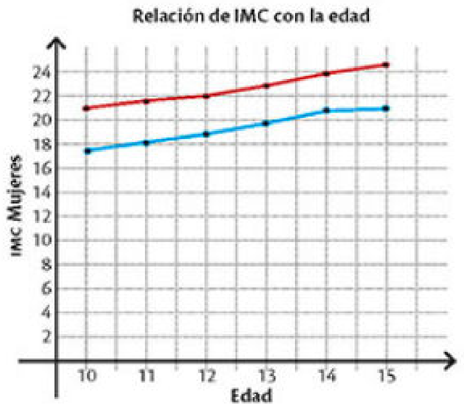
Reúnanse en equipo y resuelvan los siguientes planteamientos.

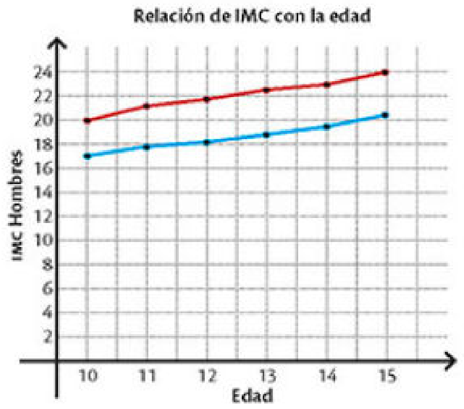
¿Sabías que...

Caminar 15 minutos diarios nos ayuda a quemar grasa corporal?

Actividad 2. El cuerpo humano debe mantener una relación entre peso y estatura para considerarlo dentro de un rango sano. A esta relación se le conoce como índice de masa corporal (IMC). Su valor varía con la edad y otros factores como la cantidad de tejido muscular. Aún cuando no es una medida perfecta puede ser útil para tomar decisiones acerca del control de peso.

Se llevó a cabo una investigación en un grupo de estudiantes de entre 10 a 15 años de edad, considerados en el rango de delgados, saludables y con sobrepeso; se les aplicó la relación $\text{IMC} = \dfrac{\text{kilogramos}}{(\text{estatura})^2}$ y se obtuvieron las siguientes gráficas.





Por debajo de la línea azul corresponde a las personas delgadas; entre la línea azul y la roja, las personas con IMC dentro del rango saludable y por encima de la roja, las que tienen sobrepeso.

Carlos quiere calcular su IMC, tiene 13 años, pesa 63 kg y tiene una estatura de 1.65 m. Al aplicar la relación encontró lo siguiente.

$$\text{IMC} = \frac{63}{(1.65)^2} = 23.1$$

Con esta información, contesten.

a) ¿El peso de Carlos se encuentra en el rango de lo saludable?

b) Calculen el IMC de un niño de 11 años que pesa 55 kg y tiene una estatura de 1.48 m. ____________

c) Calculen el IMC de una niña de 11 años que pesa 42 kg y tiene una estatura de 1.52 m. ____________

d) Calcula tu IMC. ____________

e) ¿Qué estatura corresponde a una persona de 15 años saludable, que pesa 60 kg y cuyo IMC es de 23.8?

f) Completen la tabla y, de acuerdo con el IMC, determinen el físico (delgado, saludable, con sobrepeso).

Aplicación

En física es frecuente encontrar dos variables cuya dependencia es directa, pero no lineal. Cuando se representan gráficamente, casi siempre, se obtiene una línea curva que puede crecer o decrecer con mucha rapidez, dependiendo del modo de proporción entre las variables. Algunos ejemplos son la gravitación universal y la distancia entre las masas.

Género	Edad	Peso (kg)	Altura (m)	IMC	Físico
F	12	60	1.60		
F	13		1.60	20.30	
F	14	50		21.90	
F	15		1.50	20.80	
M	12	70	1.60		
M	13	65		24.97	
M	14	59	1.50		
M	15	52		23.50	

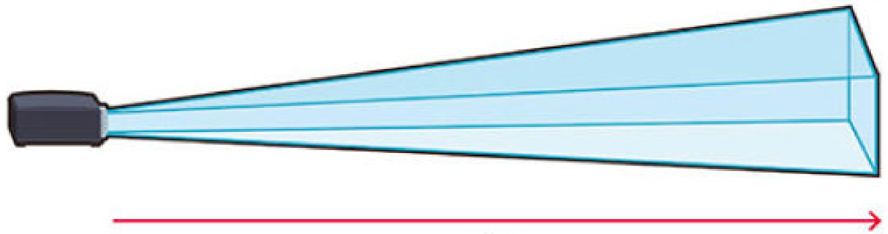
Comparen sus resultados con los del equipo más cercano y elaboren una conclusión común.

En equipo, resuelvan el siguiente problema.

Actividad 3. Para la firma de boletas del primer bimestre, el tutor del grupo proyectó a los padres de familia el plan de trabajo para el siguiente bimestre considerando las calificaciones y el promedio que obtuvieron los estudiantes en todas las materias.

Para colocar el proyector, el tutor consideró la siguiente tabla de medidas.

Distancia entre el proyector y la pared (m)	1	2	3	4
Área de la imagen (m^2)	0.36	1.44	3.24	5.76



6 m

Razono

¿Las áreas de las imágenes proyectadas son proporcionales a las distancias? ¿Cuál es la razón de proporcionalidad? Comparte tu razonamiento con el grupo y concluyan juntos.

a) ¿Qué relación hay entre la distancia del proyector y el área de la imagen?

b) Escriban la expresión algebraica que relaciona la distancia de proyección con el área de la imagen.

c) Con base en el modelo del proyector completa el siguiente cuadro.

Distancia entre el proyector y la pared (m)	3.5	5	6	7.5
Área de la imagen (m^2)				

c) Si se considera una distancia de 6 m, calcula el área de la imagen que se esté proyectando. ______

d) Considera el largo que tiene tu salón de clases; si se coloca el proyector desde el fondo de tu aula, ¿cuál sería el área de la proyección? ______

PARA TENERLO PRESENTE

Una *relación de variación cuadrática* es aquella en la que una de las variables aparece elevada al cuadrado; por ejemplo, al analizar la energía potencial que almacena un resorte al ser comprimido, la ecuación que representa ese fenómeno está dada por:

$$\text{Energía potencial} = K\,(\text{distancia comprimido})^2$$

PARA TERMINAR

Resuelve los siguientes problemas.

1. En cierta ocasión una empresa de barras integrales de fruta promocionó desde las alturas sus productos, dejándolos caer. El globo desde donde los dejaron caer se encontraba a una altura de 160 m y se registraron los siguientes datos.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Distancia de caída (m)	0	4	16	36	64

a) Deduce la expresión algebraica que modela esta situación. ______

b) Utilizando dicha expresión algebraica, completa la siguiente tabla y elabora en tu cuaderno una gráfica en la que representes esos datos.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Distancia de caída (m)	0	4	16	36	64					

c) ¿Cuántos segundos tardaron los productos en llegar al suelo? ______

d) En tu cuaderno, describe el procedimiento que utilizaste para llegar a esa conclusión.

e) En algunos otros lugares, el globo que dejó caer los productos se encontraba a una altura de 300 m. En las mismas condiciones ambientales, ¿cuánto tiempo tardaron en llegar? Descríbele a un compañero cómo lo calculaste y escucha su procedimiento.

f) ¿Es cuadrática la relación entre las variables distancia de caída y tiempo? Argumenta tu respuesta y anótala en tu cuaderno.

2. Revisa las actividades 1 a 3 de la sección "Construyo" y determina si las relaciones que presentan son de variación cuadrática. Compara tus respuestas con las de tus compañeros, e intercambien conocimientos y experiencias adquiridos. Corrijan de ser necesario.

EJE MANEJO DE LA INFORMACIÓN

TEMA Nociones de probabilidad

Contenido

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

1.6. Escala de probabilidad. Eventos complementarios, excluyentes e independientes

Recuerda que...

Al resultado de un experimento se le llama *evento*.

Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama *espacio muestral* (E).

La probabilidad mide la frecuencia con la que ocurre un resultado en un experimento. Los valores de la escala de probabilidad se miden de 0 a 1, donde 0 indica que un evento es imposible y el valor 1 indica que un evento es seguro.

LO QUE SÉ

1. Si de la palabra *Carlos* se selecciona al azar una letra:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea la letra *a*? Exprésala como fracción, número decimal, porcentaje y completa la siguiente tabla.

Evento	Fracción	Decimal	Porcentaje (%)
Vocal			
No es vocal			
Letra *s*			
Letra *a*			

b) De los eventos anteriores, ¿algunos tuvieron la misma probabilidad? ________ ¿Cuáles? ____________________

c) ¿En cuál evento se tuvo mayor probabilidad? ____________________ ¿En cuál se tuvo menor probabilidad? ____________________

d) Comparen sus respuestas y argumentos con los de sus compañeros de grupo. En su cuaderno, expliquen cómo calcularon la probabilidad, así como la conversión a número decimal y a porcentaje?

CONSTRUYO

En equipo, resuelvan las siguientes situaciones.

Actividad 1. En el monedero de Martha hay 40 monedas: 16 monedas de un peso, 12 de dos pesos, 4 de diez pesos y 8 de cinco pesos. ¿Cuál es la probabilidad de extraer del monedero, sin ver, ...

una moneda de...	Probabilidad (fracción)	Probabilidad (%)
un peso?		
dos pesos?		
cinco pesos?		
diez pesos?		

¿Cuál es la probabilidad de obtener ...

a) una moneda que no sea de un peso? ____________________

b) una moneda de cinco pesos o más? ____________________

c) una moneda de menos de cinco pesos? ____________________

d) ¿Es posible que ocurran al mismo tiempo las situaciones de *a*) y *b*)? ¿Y las de *a*) y *c*)? Justifica tu respuesta. ____________________

e) ¿Cuánto suman las probabilidades de los eventos *b*) y *c*)? ____________________

Actividad 2. Al hacer girar una ruleta todos los números tienen la misma probabilidad de ser elegidos. Completa la tabla y determina la probabilidad de cada evento.

Ruleta		
Evento	Probabilidad	Porcentaje
Cualquier número		
Números primos		
Múltiplo de 5		
Números rojos	$\frac{18}{37}$	48.6%
Números negros		
Números pares		
Números nones		

a) ¿Cuál es la suma de las probabilidades de que aparezca un número par y la probabilidad de que aparezca un número impar? ________ ¿Pueden ocurrir estos dos eventos al mismo tiempo? Argumenta tu respuesta. ____________

b) ¿Puede ocurrir al mismo tiempo que salga un número negro y un número rojo? ____________________

c) ¿Puede ocurrir al mismo tiempo que salga un número primo y un múltiplo de 5? ¿Por qué? ____________________

Recuerda que...

Un *número primo* solo puede dividirse exactamente entre sí mismo y entre 1, es decir, sus factores solamente son el 1 y él mismo.

Aplicación

Los juegos de azar, como la lotería y otras variantes tienen una probabilidad muy baja de ser ganados. Si consideramos un juego de azar en el que se deben elegir 6 números de entre 56 sin repetirlos, la probabilidad de acertar la combinación ganadora es de 1 entre 32 468 436. Por ello, los premios suelen ser bastante considerables.

En tu cuaderno, resuelve las siguientes situaciones.

Actividad 3. Se lanzan dos dados simultáneamente.

a) Escriban el espacio muestral de este evento.
b) Escriban el espacio muestral si las puntuaciones de los dados suman 10. Considerando esto, calculen la probabilidad de que ocurra.
c) Escriban el espacio muestral del evento si la suma de sus puntos es 7. Usando esto, calculen la probabilidad de que ocurra.
d) Escriban el espacio muestral si la suma es un número primo. Usando esto, calculen la probabilidad de que ocurra.
e) En plenaria, analicen las probabilidades obtenidas según el espacio muestral y concluyan.

Actividad 4. Una baraja inglesa tiene cuatro figuras (♣, ♠, ♥, ♦) y de cada figura hay 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K). Determinen el espacio muestral si se extrae aleatoriamente una carta de la baraja inglesa.

a) Consideren el espacio muestral y calculen la probabilidad de que al sacar una carta al azar...

la carta sea...	Probabilidad (fracción)
negra.	
roja.	
un número par.	
un número impar.	
un número primo.	
una letra.	
un número menor que 7.	
de corazones.	
de tréboles.	
par y roja.	
menor que 7 y roja.	
de letra y corazón.	
negra y roja.	

b) ¿Qué relación existe entre la probabilidad de obtener un número menor que 7, la probabilidad de obtener una carta roja, y la probabilidad de obtener un número menor que 7 que sea rojo? Anótenlo enseguida. ______________________

____

c) Ahora, apliquen el razonamiento para el evento de obtener una carta que sea letra y corazón. Anótenlo. ______________________

____

d) ¿Por qué la probabilidad de obtener una carta negra y roja es cero? Justifiquen su respuesta. ______________________

____

e) Analicen las probabilidades calculadas en esta actividad, ¿qué pueden concluir respecto de los eventos y sus probabilidades? Elaboren una conclusión grupal.

____

PARA TENERLO PRESENTE

Los *eventos mutuamente excluyentes* son aquellos que no pueden suceder al mismo tiempo. Para determinar las probabilidades de obtener dos eventos mutuamente excluyentes se suman las probabilidades de cada evento; por ejemplo, al lanzar un dado, obtener 2 y obtener 5 son eventos mutuamente excluyentes.

Los *eventos complementarios* son aquellos en los que si no sucede el primero, seguramente ocurre el segundo. La suma de sus probabilidades es 1 (o 100%); por ejemplo, al lanzar un volado, obtener águila y obtener sol son eventos complementarios.

Los *eventos independientes* son aquellos en los que el resultado del primero no influye en el segundo, y para obtener su probabilidad se multiplican las probabilidades de cada uno.

Actividad 5. Si se lanza un dado, ¿cuál es probabilidad de que ocurran los siguientes eventos?

a) Evento (A) que se obtenga un número igual o menor que 3. ______________
b) Evento (B) que resulte igual al número 5 o mayor. ______________
c) Al no ser mutuamente excluyentes, P(A o B): ______________

Actividad 6. Si se extrae aleatoriamente una carta de una baraja inglesa, ¿cuál es la probabilidad de extraer una carta as y que sea de tréboles? ______________

a) Al no ser mutuamente excluyentes, P(as y trébol): ______________

Actividad 7. Se tiene una caja que contiene 50 papeles de colores: 15 rojos, 5 morados, 9 verdes, 11 anaranjados y 10 azules. Calculen la probabilidad de extraer de la caja un papel que sea verde o anaranjado, P(verde o anaranjado).

Actividad 8. Se extrae una carta y se regresa a la baraja y posteriormente se toma otra; calculen la probabilidad de que la primera sea un diamante y que la segunda sea un par de trébol, P(diamante y par de tréboles).

PARA TERMINAR

Resuelve lo que se indica a continuación.

1. En una mesa de billar se tienen seis bolas numeradas del 1 al 6, determina en cada caso si los eventos son complementarios, mutuamente excluyentes o independientes y por qué.

a) Evento (*A*) formado por los números nones y evento (*B*) formado por pares.
   - Los dos eventos (*A*) y (*B*) son ______________________

   porque ______________________

b) Evento (*C*) que tenga un número primo y evento (*D*) que tenga el número 1.
   - Los eventos (*C*) y (*D*) son ______________________

   porque ______________________

c) Evento (*E*) que se obtenga el número 5 y evento (*F*) que se obtenga un número primo.
   - Los eventos (*E*) y (*F*) son ______________________

   porque ______________________

d) Evento (*G*) que se obtenga un múltiplo de 2 y evento (*H*) que se obtenga el menor de los números primos.
   - Los eventos (*G*) y (*H*) son ______________________

   porque ______________________

e) Comenta tus respuestas con el resto del grupo y revisen sus razonamientos. Concluyan entre todos.

2. Vuelve a las actividades 1 a 3 de la sección "Construyo" y determina si los eventos que aparecen en ellas son mutuamente excluyentes, complementarios o independientes. Comenta tus razonamientos con tus compañeros e intercambien conocimientos y experiencias adquiridos. Corrijan de ser necesario.

1.7. Diseño de encuesta de población

Contenido

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

LO QUE SÉ

Reúnanse en equipos y comenten los siguientes casos.

1. En la Escuela Secundaria Héroes revolucionarios, los padres de familia llenaron, además de los documentos con los datos de sus hijos, una encuesta correspondiente a un estudio socioeconómico.

a) ¿Cuál será la intención de la encuesta?

____

____

____

b) Entre la información que se pide se encuentran los datos del alumno (nombre, dirección, teléfono, código postal), quiénes integran el núcleo familiar del alumno, etcétera.
   - ¿Alguna vez has presenciado el llenado de una encuesta como esta? ¿Cuál?

   ____

   ____
   - ¿Qué otras preguntas contiene? Intercambien información entre los integrantes del equipo y anótenlas a continuación.

   ____

   ____

c) ¿Por qué la encuesta debe ser completada por los padres de familia?

____

____

d) ¿Qué preguntas de un estudio socioeconómico podrían contestar sin equivocarse?

____

____

2. En atención telefónica a clientes de diversos servicios que ofrecen compañías de gas, teléfonos, televisión de paga, tarjetas bancarias, etc., la persona que atiende, solicita unos minutos para contestar una pequeña encuesta.
   - ¿Qué es lo que preguntan? ______________________

   ____
   - ¿Cuál será la finalidad de la encuesta? ______________________

Razono

Resuelve las siguientes ecuaciones por medio de cálculo mental.

a) $24 - 3^2 =$
b) $138 + 6 =$
c) $(13)(12) =$
d) $45 - 14 =$
e) $(75)(5) =$

Comparte tus procedimientos con tus compañeros y el profesor.

CONSTRUYO

A continuación, responde de manera individual lo que se solicita.

Actividad 1. Algunas preguntas de este tipo de encuesta son abiertas, es decir, se contestan con enunciados, pero también pueden contener preguntas en las que se elige una opción, como en la siguiente tabla. Contesta lo que se solicita y remarca las opciones que correspondan a tu realidad.

Nombre del alumno: ______________________________

Sexo: masculino ( ) femenino ( )

Edad (años)	Número de integrantes de tu familia, incluyéndote	Vives con (puedes elegir más de una opción):	¿Cuántas veces comes al día?
13	Entre 2 y 3	Madre o padre	1
14	Entre 4 y 6	Madre y padre	2
15	Entre 7 y 9	Tíos o abuelos	3
Más de 15	Más de 9. Señala cuántos: ________	Otro(s), señala quién(es): ________	Más de 3

a) ¿Será posible que solo con tus datos se elabore algún tipo de gráfica? Justifica tu respuesta.

____

¿Por qué? ______________________________

b) ¿Con tus respuestas se pueden señalar las características de los alumnos que estudian en tu escuela? __________ ¿Por qué? ______________

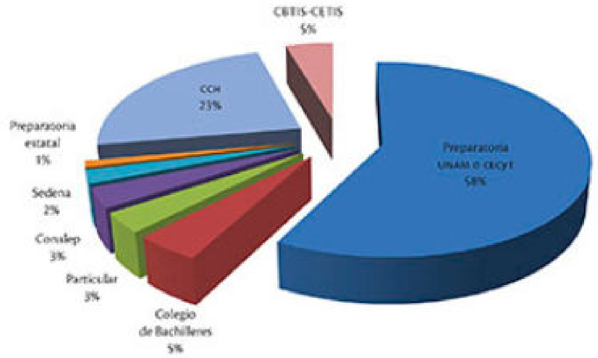
c) Con apoyo del profesor, elaboren en su cuaderno una tabla de frecuencias que considere el número de integrantes de las familias de los alumnos de tu grupo. Incluye una columna en la que conviertas la frecuencia a porcentaje. Grafica los datos en el siguiente espacio.

d) Revisen sus resultados y comenten sus procedimientos. Corrijan si es necesario.

En equipo, resuelvan lo siguiente.

Actividad 2. Algo que interesa a los alumnos de tercer grado de secundaria es en qué escuela van a continuar sus estudios. Algunos orientadores de escuelas secundarias de cierta localidad decidieron encuestar a 500 alumnos, preguntándoles cuál es la escuela de su preferencia. Observa los resultados que obtuvieron.

¿Cuál es la escuela de tu preferencia?



Para elaborar esta gráfica se basaron en una tabla como esta:

CECyT IPN	Preparatoria UNAM	Conalep	CETIS	CBTIS	Colegio de Bachilleres	Preparatoria estatal	Particular	Sedena	CCH

a) Si tuvieras que elegir alguna de las instituciones que señala la gráfica anterior, ¿cuál elegirías? ______________________________

b) Con apoyo del profesor, recopilen la frecuencia de preferencia de su grupo completen la tabla y de acuerdo con los resultados respondan.

- ¿Cuál fue la institución de mayor preferencia entre los alumnos encuestados?

  ____

- ¿Cuál es la opción que menos mencionaron?

  ____

- ¿Cuántos estudiantes prefirieron una carrera técnica?

  ____

PARA TENERLO PRESENTE

Se puede presentar la información de un conteo en tablas o gráficas. Las gráficas que se usan más comúnmente son el *histograma* o *gráfica de barras*, y sirven para representar el número de datos; la *gráfica de pastel* es útil para representar porcentajes.

Cuando se desea obtener información a partir de una encuesta, la *muestra* es el conjunto de individuos que será encuestado y a partir de sus respuestas se elaborarán tablas y gráficas para poder analizar las respuestas que se obtengan.

Aplicación

¿A qué población encuestarías para saber la preferencia en el tipo de tela para uniformes deportivos?

Actividad 3. En equipo, diseñen una encuesta que les permita saber cuál es su deporte favorito.

a) En su cuaderno, generen el cuestionario que les permitirá obtener la información que necesitan.
b) Acuerden cuántas y de dónde serán las personas encuestadas.
c) Pónganse de acuerdo para saber cómo y en qué momento recabarán la información.
d) Organicen la información que recopilen.
e) Elaboren una presentación con gráficas que les permita explicar y dar a conocer sus resultados.
f) Redacten una conclusión.
g) Reflexionen por qué es importante diseñar una encuesta antes de llevarla a cabo. Compartan sus comentarios de equipo y anoten su conclusión.

Actividad 4. En equipo, elaboren una encuesta para conocer lo memorable de la secundaria y presenten el informe a todos sus compañeros. En la elaboración de la encuesta cuiden la presentación de las ideas y la ortografía. Pídanle a su profesor de Español algunas sugerencias para elaborarla.

PARA TERMINAR

Resuelve el siguiente problema de manera individual.

1. La nevería Los Alpes se encuentra frente a una escuela secundaria. Todos los días, los estudiantes que regresan a pie a sus casas pasan a comprar alguno de los productos que ofrece dicho negocio. Debido a la disminución de las ventas, el administrador decidió hacer un pequeño estudio que se llevó a cabo mediante el registro de las ventas de nieve entre las 2 y las 3 de la tarde de un día entre semana. Los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla.

Sabor	Nieves vendidas	Porcentaje
Limón	20	
Fresa	15	
Mamey	10	
Mango	10	
Zapote	5	

a) Completa la tabla calculando el porcentaje de nieves vendidas de cada sabor.
b) ¿Cuál fue la muestra que integró este estudio?
c) ¿Qué población seleccionó el administrador para hacer el estudio?
d) ¿De qué manera se pueden representar gráficamente los resultados obtenidos? Haz tu propuesta en el cuaderno.
e) Analiza tu gráfica y escribe los hallazgos del administrador. ¿Qué acciones podría llevar a cabo sustentadas en la encuesta realizada?
f) Comparte con el grupo las respuestas de cada pregunta y, junto con tu profesor, valídenlas.

EVALUÁNDOME

I. Resuelve cada una de las siguientes situaciones. Al finalizar la prueba, revisen en grupo sus resultados y procedimientos.

1. José tiene 3 años más que María y la suma de los cuadrados de sus edades es 317. La ecuación que corresponde al enunciado para calcular las edades de José y María es:

a) $j^2 + m^2 = 317$ c) $j^2 + (j - 3)^2 = 317$

b) $j - m = 3$ d) $j^2 + (j + 3)^2 = 317$

2. Patricia asistió al remate de diversos artículos de oficina. Compró, por mayoreo, cierta cantidad de cuadernos por la que pagó en total \$180. Si se hubiera llevado 6 cuadernos menos, cada uno le habría costado \$1 más y hubiera tenido que pagar la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos cuadernos compró?

a) 30 c) 45

b) 36 d) 60

3. Selecciona la opción que corresponda a la ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean: 3 y −2.

a) $x^2 - x - 6 = 0$ c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $x^2 + x - 6 = 0$ d) $x^2 + 3x - 2 = 0$

4. En las siguientes opciones se encuentra la medida, en centímetros, de tres segmentos. ¿En cuál opción se encuentran los valores que permiten formar un triángulo rectángulo?

a) 1, 7, 9 c) 2, 5, 8

b) 2, 4, 6 d) 3, 7, 9

5. En las siguientes opciones se muestra la medida del perímetro de un triángulo cuya medida de los lados se encuentra en unidades enteras, excepto en:

a) 4 c) 6

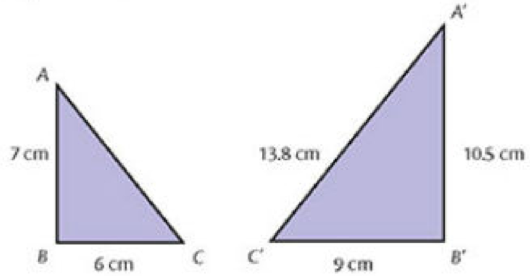
b) 5 d) 7

6. Si un triángulo solo pudiera tener unidades enteras en la medida de sus lados, ¿cuántos triángulos diferentes habría cuyo perímetro fuera de 13 unidades?

a) 3 c) 5

b) 4 d) 6

7. Considerando que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, la medida que falta al triángulo de la izquierda es:



a) 9 cm c) 11.8 cm

b) 9.2 cm d) 12.25 cm

8. Como regalo para el 50 aniversario de bodas de sus padres, Jaime mandó ampliar una fotografía que tomaron el día del evento. El marco para la fotografía tiene espacio central de 100.8 cm de largo. La fotografía original mide 56 cm de largo y 35 cm de ancho. ¿Qué medida tendrá el ancho de la foto ampliada?

a) 19.4 cm c) 79.8 cm

b) 63 cm d) 161.2 cm

II. Lee atentamente, la información te servirá para responder los incisos que le siguen.

Para hacer una exposición de matemáticas, el equipo de Lourdes se encargó de elaborar los adornos de la entrada. Decidieron trazar figuras semejantes, entre ellas, las escuadras del juego de geometría. La primera figura elaborada fue la escuadra de 45°; tomaron como guía una escuadra cuyos lados iguales miden 3.5 centímetros.

9. Si la nueva escuadra debe estar en proporción 6:1, ¿cuánto deben medir sus lados iguales?

a) 1.7 cm c) 6 cm
b) 3.5 cm d) 21 cm

10. En una proporción 3:1, ¿cuánto deben medir sus ángulos agudos?

a) 15° c) 45°
b) 30° d) 60°

11. Considerando la escuadra de 60° y la medida de su base, ¿con qué criterio es posible trazar una figura congruente?

a) *LLL* c) *ALA*
b) *LAL* d) *AAA*

III. Identifica en los siguientes experimentos de qué tipo de evento se trata.

12. Al lanzar una moneda 4 veces seguidas resultó en todas sol, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzarla otra vez caiga sol?

a) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$ d) 1

13. Si al lanzar una moneda cae águila, es un evento…

a) simple. c) excluyente.
b) complementario. d) independiente.

14. Dado el experimento de lanzar un dado dos veces; si la primera vez resulta un múltiplo de 2 y la segunda resulta un número mayor que 3, son eventos…

a) simples. c) mutuamente excluyentes.
b) complementarios. d) independientes.

15. Al lanzar una moneda 4 veces seguidas resultó en todas águila, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzarla otra vez caiga una vez águia?

a) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{4}$ d) 1

16. Cierta marca de calzado deportivo desea producir los tenis más atractivos para los adolescentes de un país de América Latina; por ello, aplicarán una encuesta a algunos alumnos de secundaria.
Considerando lo anterior, elige la opción que contenga tres de los aspectos prioritarios para incluir en dicha encuesta.

1. El costo de fabricación.
2. El gusto del joven por el deporte.
3. La actividad para la que se requiere.
4. La edad de quien los usará.
5. La talla de quien los usará.
6. Que tenga determinado diseño.

a) 1, 2, 6 c) 2, 4, 5
b) 1, 3, 4 d) 3, 5, 6

17. Se tienen tres pliegos de papel lustre verde con medidas de 30 cm por 40 cm; en uno de ellos se van a trazar todos los triángulos rectángulos posibles, con medidas de 3 cm, 4 cm y 5 cm, respectivamente. En los pliegos restantes, buscando no desperdiciar un solo centímetro cuadrado, se trazarán triángulos semejantes al citado, a una escala de 2:1. ¿Cuántos triángulos se trazarán en total?

a) 25 c) 50
b) 30 d) 100

Registro mis avances

Tema	Pregunta	Aciertos	En esta sección, marca tu nivel de aprendizaje alcanzado en cada tema. Considera las observaciones de tu profesor			
			Requiero de total apoyo	Necesito practicar	Casi lo domino	Óptimo
Patrones y ecuaciones	1, 2, 3, 4					
Figuras y cuerpos	5, 6, 16					
Proporcionalidad y funciones	7, 8, 9, 10, 11					
Nociones de probabilidad	12, 13, 15					
Análisis y representación de datos	14, 17					
Mi total de respuestas correctas			Mi porcentaje de respuestas correctas			

Escribe qué puedes hacer para mejorar tu aprovechamiento y sugiere qué tipo de apoyos requieres.

____

____

Aplicaciones matemáticas

Las matemáticas no son operaciones y procedimientos que se deben memorizar y que no tienen ninguna utilidad. Al contrario, el mundo está lleno de matemáticas y estas constituyen una útil herramienta de análisis porque ofrecen la posibilidad de tomar decisiones a partir de la reflexión que hacemos de ellas. También nos permiten visualizar con más claridad los panteamientos para poder solucionarlos.

En esta sección te proponemos que utilices lo que has aprendido, además de las habilidades que ya tienes y has desarrollado, para que notes cómo puedes aplicar las matemáticas en situaciones reales.

En cada bloque encontrarás un problema de aplicación en el que deberás poner en práctica tus competencias matemáticas para resolverlo. Puedes contestarlo de manera individual, sin embargo, si lo llevas a cabo en equipo podrás enriquecerte con las opiniones de los demás.

Siempre apóyate en tu profesor si tienes dudas o necesitas orientación para resolver la situación.

La contaminación y sus consecuencias

En nuestro país, como en otros países del mundo, la contaminación es consecuencia de las diversas actividades humanas. Por ejemplo, la actividad minera, iniciada siglos atrás, marca el origen de la generación de residuos peligrosos y de la intensa contaminación de suelos, la cual se acrecentó con la industria química básica, petroquímica y de refinación de petróleo.



La contaminación afecta el suelo, el agua, la tierra y el aire.

1. El uso de las tecnologías de la información y comunicación ha permitido conocer en corto tiempo diversos problemas, entre ellos, la contaminación. Los tipos de contaminación que existen están relacionados con los recursos naturales. Investiga en internet, en libros, revistas o en otras fuentes, cuestiones como:
   - ¿Cuáles son los tipos de contaminación más conocidos o los de mayor peligro y sus consecuencias para la vida?
   - ¿Cuáles son los países con mayor contaminación?
   - ¿En qué lugar se ubica el nuestro?
   - ¿Cómo se mide la contaminación?
   - Cualquier pregunta que surja de su curiosidad y esté relacionada con este tema.

   Reúnete con tu equipo, compartan y comenten la información investigada y organícenla para presentarle al grupo un resumen de cinco minutos.
2. A partir de la investigación anterior, seleccionen el tipo de contaminación que consideren que afecta más a su comunidad escolar. Si es necesario, tengan en cuenta la ubicación geográfica de su escuela y las fuentes más cercanas de contaminación, por ejemplo: tiraderos de basura, dispositivos que generan altos niveles de ruido, contaminación de mantos acuíferos, industrias, criaderos de animales, etcétera.

3. Cuando hayan seleccionado el tipo de contaminación que afecta más a su comunidad escolar, profundicen en este tema investigando en diversas fuentes. A partir de la información obtenida elaboren una encuesta que les permita saber qué tanto de este problema conoce la comunidad y cuánto está afectando en realidad este tipo de contaminación a la localidad.

   El formato de las preguntas puede ser de opción múltiple o de respuesta abierta, pero todo dependerá de la información que deseen obtener. Algunas preguntas que pueden plantear son:

Cada integrante del equipo puede contribuir a la investigación.

Nombre: Jorge Gutiérrez Edad: 15 años

Encuesta sobre contaminación

1. ¿Cuántos tipos de contaminación conoces?
2. ¿Cuál consideras que es el tipo de contaminación que afecta más a tu comunidad?
3. ¿Qué haces para disminuir la contaminación en la comunidad?

La investigación en la biblioteca les permitirá conocer más del tema.

4. Pueden pedir asesoría a su profesor de Ciencias III y apoyarse en su profesor de Español III para que les ayuden a revisar la claridad de las preguntas y el formato para la encuesta.
5. Determinen el tamaño de la muestra en que se aplicará la encuesta. Recuerden que no es práctico aplicarla a toda la población, pues hacerla así traería desde altos costos económicos hasta grandes inversiones de tiempo tanto para su aplicación, como para el tratamiento de los datos recopilados y la obtención de información.
6. Apliquen su encuesta y ya con los resultados organícense para analizarlos. En equipo, comenten cuál sería la mejor forma para presentarlos y las razones de ello. Con su análisis consideren los aspectos más importantes para exponerlos frente a sus compañeros en cinco minutos como máximo. Recuerden que el tipo de respuestas obtenidas en la encuesta y lo que quieran mostrar a sus compañeros les será de utilidad para decidir cómo darle tratamiento a los resultados.
7. Presenten sus resultados al grupo dando una muy breve introducción de por qué decidieron hacer la encuesta y cuál es el problema que querían conocer a partir de ella. Como conclusión del manejo de la información, elaboren una presentación de sus resultados utilizando el análisis que hicieron y las razones por las que decidieron hacerlo así.
8. A partir de las investigaciones presentadas, entre todo el grupo elaboren, con apoyo de su profesor, una propuesta de mejora o solución de los problemas presentados.
9. Si es posible, organícense como generación de alumnos de tercer grado y hagan una carta mural con la información correspondiente.

La presentación de los resultados debe llevarse a cabo en un tiempo no mayor a cinco minutos.

BLOQUE 2

Ejes	Temas	Contenido	Sesiones
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	2.1. Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	9
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	2.2. Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	5
		2.3. Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	5
	Medida	2.4. Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	4
		2.5. Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	5
Manejo de la información	Nociones de probabilidad	2.6. Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	5

Para lograr los aprendizajes esperados planteados en este bloque, se sugiere la dosificación de contenidos en sesiones como se muestra en la tabla; además, se recomienda destinar dos sesiones para la aplicación y revisión de exámenes y cinco sesiones para el desarrollo y la presentación de las actividades de la sección "Aplicaciones matemáticas" al final del bloque.

APRENDIZAJES ESPERADOS

En este bloque, el estudiante aprenderá a:

- Explicar el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identificar las propiedades que se conservan.
- Resolver problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

El estudio de las matemáticas en la educación básica favorece las siguientes competencias:

- **Resolver problemas de manera autónoma**
- **Comunicar información matemática**
- **Validar procedimientos y resultados**
- **Manejar técnicas eficientemente**

EJE **SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO**

TEMA **Patrones y ecuaciones**

Contenido

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

2.1. Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización

Razono

Resuelve mediante calculo mental.

a) $x - 3 = 0$

c) $x - \frac{1}{3} = 0$

d) $\frac{x}{2} + 1 = 0$

e) $3x = 0$

f) $6x + 3 = 2x$

Escribe en tu cuaderno qué estrategias utilizaste para encontrar las respuestas de estas ecuaciones, compáralas con tus compañeros y corrígelas si es necesario.

LO QUE SÉ

Resuelve lo que se indica a continuación.

1. La casa de Mauricio está construida en un terreno de forma rectangular, el cual mide el doble de largo que de ancho. Mauricio asegura que el área del terreno es de 242 m^2.
   a) ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente al área del terreno donde está la casa de Mauricio? ____________________
   b) Mauricio supone que el ancho del terreno mide 11 m. ¿Mauricio tiene razón? Justifica tu respuesta. ____________________
   c) Si Mauricio tuviera razón en la medida del ancho, ¿cuántos metros de largo tendría su terreno? ____________________
   d) ¿Cuál es la expresión algebraica correspondiente al perímetro del terreno? ____________________
   e) Mauricio piensa que el perímetro de su terreno es de 33 metros. ¿Es correcto? Argumenta tu respuesta. ____________________

2. Reúnanse en equipo. Observen la siguiente figura y completen la tabla correspondiente.

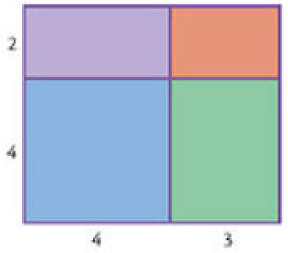


Figura	Área
Azul	
Roja	
Morada	
Verde	

   a) ¿Cuál es el área total de la figura? ____________________
   b) ¿Hay más de una forma de obtenerlo? Comenta con tus compañeros tu procedimiento y anótalo. ____________________

3. En equipo, relacionen los productos algebraicos con su resultado. Comenten los procedimientos que están utilizando.

a) $x(x + 3)$	( ) $2x^2 + 8x$
b) $x(x + 5)$	( ) $x^2 + 5x$
c) $2x(x + 4)$	( ) $x^2 + 3x$
d) $5x(x - 4)$	( ) $\frac{x^2}{2} + x$
e) $\frac{x}{2}(x + 2)$	( ) $5x^2 - 20x$

CONSTRUYO

A continuación, resuelve lo que se indica en cada actividad.

Actividad 1. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas. Compara y comenta tus procedimientos con los de un compañero.

a) $x^2 + 6x = 0$ ________	f) $x^2 + 9x = 0$ ________
b) $x^2 + 4x = 0$ ________	g) $2x^2 + 4x = 0$ ________
c) $x^2 - 8x = 0$ ________	h) $2x^2 - 6x = 0$ ________
d) $x^2 - 3x = 0$ ________	i) $3x^2 + 15x = 0$ ________
e) $x^2 - 5x = 0$ ________	j) $5x^2 - 20x = 0$ ________

Recuerda que...

Para despejar una variable que se encuentra al cuadrado utilizamos la operación raíz cuadrada. Exponentes y raíces son operaciones inversas, como la suma y la resta, o la multiplicación y la división.

REFLEXIONA Y RESPONDE

¿Es cierto que cuando el producto de dos factores es cero, implica que al menos uno de sus factores es cero?

Si $x^2 + 2x = 0$, entonces:

$$x(x + 2) = 0$$

Por tanto: $x_1 = 0$; $x_2 = -2$

Compruébalo.

____

PARA TENERLO PRESENTE

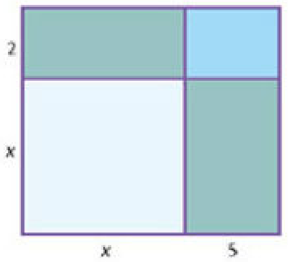
Al factorizar un polinomio con factores comunes se busca expresarlo como una multiplicación en la que uno de sus factores es el *mayor factor común*.

El mayor factor común de $x^2 + x$ es ____________________

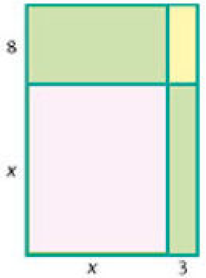
El mayor factor común de $2x^2 - 6x$ es ____________________

El mayor factor común de $6x^2 - 9x$ es ____________________

Actividad 2. Reúnanse en equipos y contesten lo siguiente. Revisen sus respuestas, identifiquen y resuelvan las diferencias.



a) Dado un cuadrado de lado x, al aumentar 5 cm a la base y 2 cm a la altura se formó un rectángulo cuya área es $x^2 + 7x + 10$. Escriban el área de cada parte de la figura y comprueben que la suma corresponde al área dada.



b) Se tiene un cuadrado que tiene un lado x. Al aumentar 3 cm a la base y 8 cm a la altura se formó un rectángulo. Escriban la expresión algebraica que represente el área del rectángulo.

c) Se tiene un cuadrado de lado x; se aumentaron 4 cm a la base y 1 cm a la altura y se formó un rectángulo. Determinen la expresión algebraica que represente el área del rectángulo.

Usa las TIC

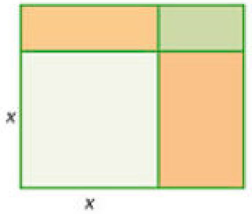
Visita la siguiente página, en ella encontrarás otra manera de resolver las ecuaciones cuadráticas, además de diversos juegos matemáticos.
"Disfruta las matemáticas"
http://goo.gl/b7pgH
(consultado el 2 de diciembre de 2016).

PARA TENERLO PRESENTE

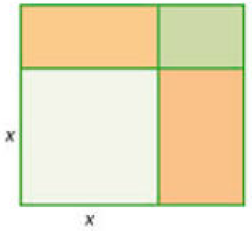
Observa que en las expresiones algebraicas de la actividad anterior el *coeficiente* corresponde a la suma de las cantidades en la base y en la altura del *término lineal*, su producto corresponde al *término independiente*.

Actividad 3. Dado que la expresión algebraica representa el área del rectángulo, escribe las medidas que falta añadir en la base y la altura del rectángulo correspondiente. Usa el recuadro para comprobar que las expresiones corresponden. Al terminar, comparte tus resultados con tu profesor y escucha sus comentarios.

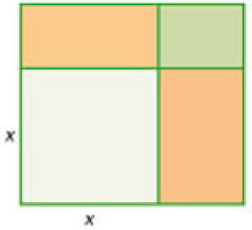
a) $x^2 + 7x + 10$



b) $x^2 + 17x + 72$



c) $x^2 + 10x + 21$



REFLEXIONA Y RESPONDE

¿En las expresiones algebraicas de la forma $x^2 + bx + c$, siempre resulta que se obtienen dos binomios en los que la suma de los términos no comunes corresponde al coeficiente del término en x y su producto corresponde con el término independiente? Compruébalo.

¿Sabías que...

En el siglo XVI antes de nuestra era (a.n.e.), los egipcios desarrollaron un método algebraico para resolver problemas cotidianos relacionados con la repartición de víveres, cosechas y materiales, sin usar la notación simbólica (x o y)?

Usa las TIC

Si quieres conocer más sobre la historia de las ecuaciones, visita la página "Un poquito de la historia del álgebra" http://goo.gl/Kf3mt1 (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Actividad 4. Si cada una de las siguientes expresiones algebraicas corresponde al área de un rectángulo, como los de la actividad anterior, calcula y completa cuánto se aumentó, en cada caso, a la base y a la altura.

a) $x^2 + 8x + 15 = (x + \quad)(x + \quad)$

b) $x^2 + 8x + 12 = (x + \quad)(x + \quad)$

c) $x^2 + 8x + 7 = (x + \quad)(x + \quad)$

d) $x^2 + 8x + 16 = (x + \quad)(x + \quad)$

Compara tus resultados con los del compañero más cercano y, en caso de que haya diferencias, comenten los procedimientos utilizados.

Actividad 5. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas y, en equipo, comparen sus respuestas.

a) $x^2 + 10x + 25 =$

b) $x^2 + 10x + 16 =$

c) $x^2 + 10x + 9 =$

c) $x^2 + 9x - 10 =$

d) $x^2 - 9x - 10 =$

e) $x^2 - 9x - 22 =$

REFLEXIONA Y RESPONDE

Si el término independiente de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ es negativo, ¿cómo son los signos de sus factores? ______

Si el término independiente es positivo, ¿qué signo tienen sus factores? ______

En equipo, escriban un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, preséntenlo al grupo para que lo factoricen y encuentren los dos binomios que lo forman.

PARA TENERLO PRESENTE

Un *factor* es cada una de las cantidades o expresiones que al multiplicarse conforman un producto.

Al procedimiento de encontrar los factores que conforman un producto se llama *factorización*.

Para factorizar una expresión de la forma $x^2 + bx + c$ debemos encontrar un par de números, digamos n_1 y n_2, tales que $b = n_1 + n_2$ y $c = n_1 n_2$.

De esta manera la factorización será:

$$x^2 + bx + c = (x + n_1)(x + n_2)$$

Por ejemplo:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

Pues se cumple que: $3 + 4 = 7$ y $(3)(4) = 12$

Actividad 6. Considera las expresiones algebraicas de las Actividades 4 y 5. Iguala cada una a cero, para obtener una ecuación de segundo grado. Resuélvela en tu cuaderno y compara tus resultados con los de tus compañeros. Corrijan si fuera necesario.

Actividad 7. Resuelve las siguientes ecuaciones. Compara y comenta tus procedimientos con los del compañero más cercano.

a) $x^2 + 4x = -3x$

b) $x^2 + x = -2x$

c) $x^2 - 2x = 2x$

d) $x^2 - 3x = 2x$

e) $2x^2 + x = x^2$

f) $3x^2 + x = x^2 - 3x$

Razono

- En tu cuaderno escribe el número del mes en que naciste,
- multiplica ese número por 2 al producto súmale 5,
- multiplica el resultado por 50 y después suma tu edad actual,
- ahora, resta a la cantidad 250.

En el resultado, las decenas y las unidades representan tu edad; las centenas y los millares, tu mes de nacimiento. ¿Esto es correcto? Argumenta tu respuesta y coméntala con tus compañeros y tu profesor.

Actividad 8. Resuelve los siguientes problemas y desarrolla en el recuadro tu procedimiento. Compara tus resultados con los de alguno de tus compañeros y dialoguen sobre los métodos utilizados.

a) El cuadrado de un número es igual al cuádruple del mismo, ¿de qué número se trata? ________________

b) Si al cuadrado de un número se resta diez veces su valor, el resultado es cero, ¿qué número es? ________________

c) Un número multiplicado por otro dos unidades menor que él da como resultado diez veces el número en cuestión, ¿cuál es el número? ________________

d) La mitad del cuadrado de un número es igual a siete veces ese número, ¿qué número es? ________________

e) La diferencia del cuadrado de un número y seis veces dicho número da como resultado cero. Calcula el número. ________________

f) Si el área de un rectángulo se expresa como $(x^2 + 13x + 40)$ cm², ¿qué medidas tiene de base y de altura? ________________

g) Los valores que, al sustituirlos en las incógnitas, hacen verdadera la igualdad son las soluciones o raíces de una ecuación. ¿Toda ecuación tiene tantas raíces como indique su grado? Explica.

PARA TENERLO PRESENTE

Para resolver ecuaciones de segundo grado se llevan a cabo los siguientes pasos.

1. La ecuación debe estar escrita en la forma general, es decir, los tres términos concentrados en el primer miembro y ordenados así: $x^2 + bx + c = 0$. Por ejemplo, $x^2 + 9x + 20 = 0$
2. Factorizar la expresión $x^2 + bx + c = (x + n_1)(x + n_2)$. Por ejemplo: $x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$
3. Las raíces son los valores de x encontrados en el paso anterior.

Usa las TIC

Conoce más conceptos y pon en práctica destrezas básicas para factorizar expresiones cuadráticas, en "Ecuaciones cuadráticas" http://goo.gl/ln2lk (consultado el 2 de diciembre).

Investigo

Busca en algún libro de física el tema de *tiro parabólico* y analiza las ecuaciones con las que se deben resolver los problemas planteados. ¿Cómo interpretar las dos soluciones de un mismo ejercicio?

PARA TENERLO PRESENTE

En algunos problemas relacionados con la física y la geometría se obtienen, al menos, dos soluciones. Para estos casos se plantean ecuaciones cuadráticas en las que se incorpore la menor cantidad de factores posibles, para que sean sencillas de resolver y su interpretación sea la correcta.

PARA TERMINAR

1. En tu cuaderno, plantea la ecuación necesaria para cada uno de los siguientes problemas y resuélvela. Al terminar, compara tus resultados y procedimientos con los de tu compañero más cercano y anota la ecuación que corresponda a cada planteamiento en la línea de respuesta.

   a) La casa de Luis está construida en un terreno de forma rectangular que mide lo doble de largo que de ancho, por lo tanto, el área del terreno es de 242 m^2. Calcula su perímetro.

   b) El área de un jardín de forma rectangular es 117 m^2. La expresión algebraica correspondiente es $x^2 + 4x$. Calcula sus medidas, sabiendo que su perímetro es de 44 m.

   c) La suma del cuadrado de un número y el triple del mismo es igual a cinco veces tal número. Calcula cuáles números cumplen con esa condición.

   d) La suma del cuadrado de un número y la mitad del mismo es cero. ¿Cuáles números cumplen con esa condición?

   e) La diferencia del cuadrado de un número y la quinta parte del mismo es cero. ¿Qué números cumplen con esta condición?

2. En equipo, resuelvan los siguientes problemas. Comparen sus resultados con el resto del grupo y comenten sus procedimientos para corregir lo que sea necesario.

   a) Entre los lados consecutivos de un rectángulo hay una diferencia de 7 m. Si el área mide 60 m^2, ¿cuánto miden su base y su altura?

   b) El área de un triángulo mide 30 m^2. La altura es 7 m mayor que la base, ¿cuánto miden su base y su altura?

   c) El producto de dos números enteros pares consecutivos es igual a 168. ¿Cuáles son esos números?

   d) El área de un rombo es de 625 cm^2. Si una de las diagonales mide lo doble que la otra, ¿cuánto mide cada una?

e) Al construir un papalote una de las varillas centrales midió 10 cm más que la otra, de manera que se requirieron 150 cm^2 de papel para formar el rombo. ¿Cuánto mide cada varilla?

3. Resuelve los siguientes problemas en el recuadro correspondiente.

a) Un futbolista patea el balón hacia arriba con una velocidad inicial de 15 m/s. La altura de este balón estará dada por la ecuación $Altura = 15(tiempo) - 5(tiempo)^2$. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido para que el balón se encuentre a una altura de 10 m? Para resolver esto, plantea una ecuación de segundo grado y resuélvela. Justifica tu respuesta.

b) Cierto día, Juan se dio cuenta de que el producto de su edad y la edad de su hermano Jorge, quien le lleva un año, es ni más ni menos la edad de su mamá, es decir, 42 años. ¿Cuántos años tiene Juan? Para resolver este problema plantea una ecuación de segundo grado y resuélvela. ¿Tienen sentido las dos soluciones para dicha ecuación?

c) En cierto acuario hacen peceras sin tapa, a partir de un cristal rectangular que mide 120 cm de largo por 100 cm de ancho. Al formar el prisma, la longitud de la base resulta ser lo doble que la altura, en tanto que el ancho de la base mide 10 cm más que la altura. Si la pecera se llena de agua a su máxima capacidad, ¿cuál es su volumen y cuántos litros de agua se requieren para llenarla?

Contenido

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

2.2. Propiedades de la rotación y de la traslación de figuras

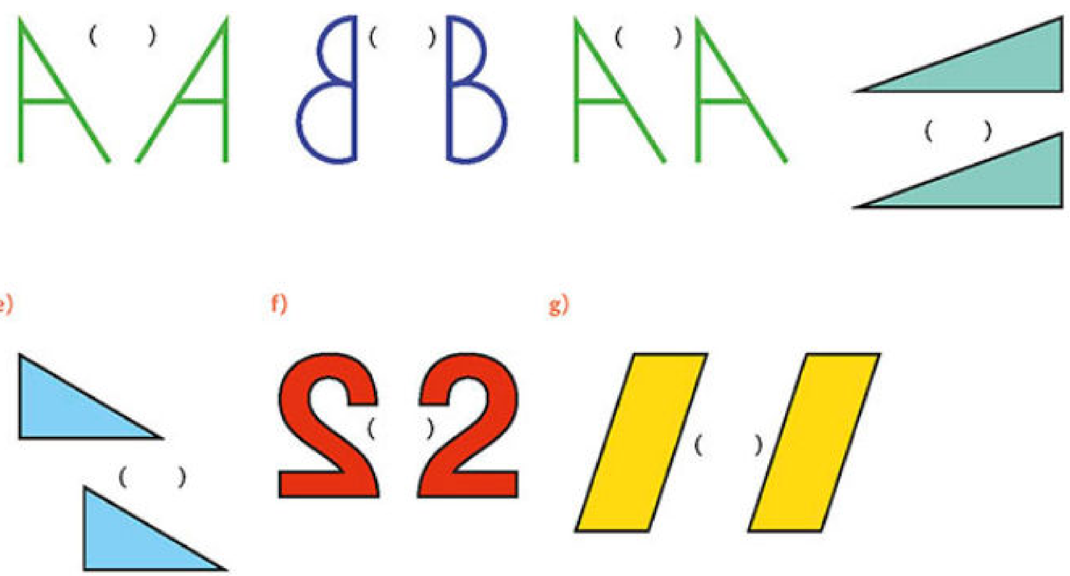
LO QUE SÉ

Lee las siguientes situaciones y resuelve lo que se indica.

1. En equipos, observen las siguientes figuras y escriban en los paréntesis que hay entre cada pareja una *S* si coinciden mediante *simetría*, o una *T* si es por *traslación*, es decir, si coinciden al desplazarlas en el plano. Comparen sus resultados con los del equipo más cercano y, si encuentran diferencias, argumenten sus respuestas.

a) b) c) d)

e) f) g)



2. Al mover una figura en el plano, aun cuando la posición cambie, ¿se modifican su forma o sus medidas? ______________________

¿Por qué? ______________________

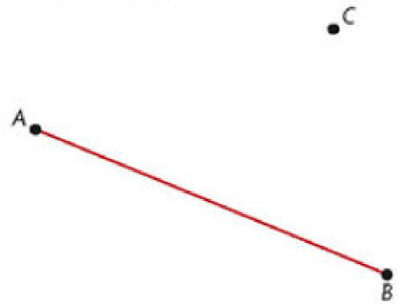
____

Aplicación

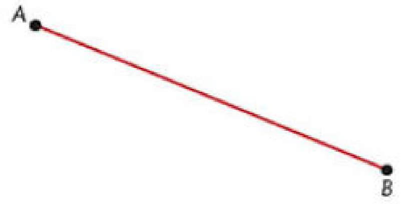
Se sabe que la Tierra se mueve alrededor del Sol. Nuestro planeta describe una trayectoria elíptica de 930 000 000 km, a una distancia media del Sol de 150 000 000 km. La Tierra gira alrededor del Sol, en 365 días, 5 h y 57 min. Lo anterior, determina el año y el cambio de estaciones. ¿Qué aspectos determinan el movimiento de rotación de la Tierra?

3. Utiliza tu juego de geometría para llevar a cabo las siguientes tareas.

a) Traza una recta paralela al segmento *AB* y que pase por el punto *C*.
Toma la medida del segmento *AB* (usando tu compás) y a partir del punto *C* traza un segmento con dicha medida. Llamaremos *D* al punto final del segmento. ¿Qué podemos decir al respecto de los segmentos *AB* y *CD*? Coméntalo con tu grupo y lleguen a una respuesta grupal.



b) Considera el siguiente segmento. Coloca un punto *C* tal que el segmento *AC* mida lo mismo que el segmento *AB* y formen un ángulo de 65°.



¿Sabías que...

la Tierra no se encuentra inmóvil, sino que está sometida a movimientos de diversa índole? Los principales movimientos de la Tierra se definen con referencia al Sol y son los de rotación y traslación, pero además de ellos existen otros llamados precesión, nutación y bamboleo de Chandler.

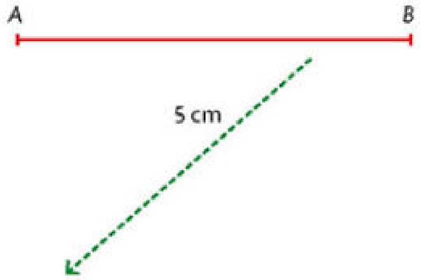
CONSTRUYO

Resuelvan lo que se indica a continuación.

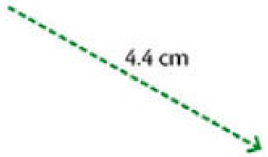
Actividad 1. Trabajen en parejas. Realicen los siguientes pasos.

a) Trasladen la línea que se muestra de acuerdo con la dirección y distancia indicadas.

- Tracen un segmento paralelo al segmento punteado comenzando en *A* y al final de dicho segmento coloca el punto *A'*.
- Para el punto *B* repitan el procedimiento del inciso anterior, colocando al final el punto *B'*.
- Finalmente, tracen el segmento *A'B'*.



b) Repitan la actividad anterior, considerando ahora la directriz:



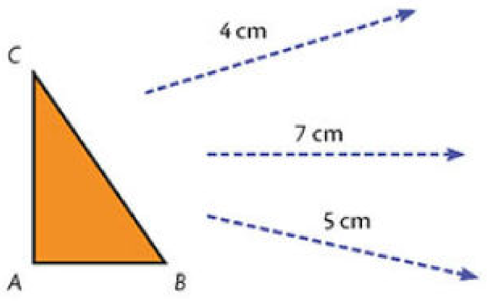
c) Comenten con el grupo y su profesor lo que ocurrió en cada caso.

Recuerda que...

Directriz es la línea que determina las condiciones de generación de otra línea o figura.

Los *lados homólogos* son los que están colocados en el mismo orden de relación.

Actividad 2. Trasladen el triángulo *ABC* en la dirección y medida que indica cada directriz.



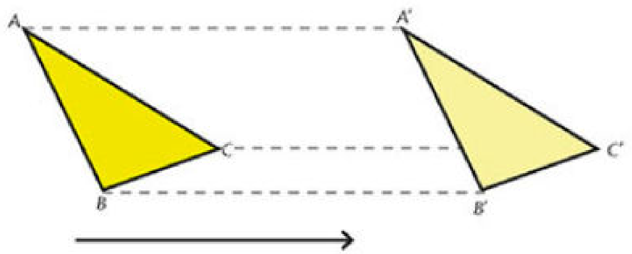
a) ¿Cambió la forma de la figura? ______________________

b) ¿Se mantienen paralelos los lados homólogos? ______________________

Investigo

Busca en la biblioteca algunos libros de arquitectura y observa los planos que se muestren, analiza cómo ve el mundo un arquitecto y su visión del espacio.

Actividad 3. Observen las siguientes figuras y respondan.



a) ¿Resultan paralelos los lados homólogos de los dos triángulos? ______________

¿Por qué? ______________________

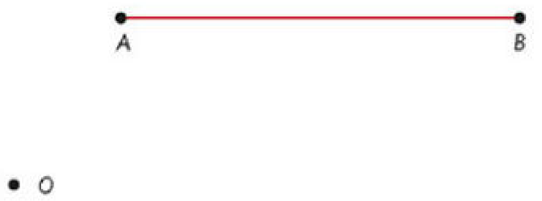
b) ¿Qué distancia se trasladó la figura? ______________________

c) ¿Se conservan las medidas del triángulo *ABC* en el triángulo *A'B'C'*? Explica.

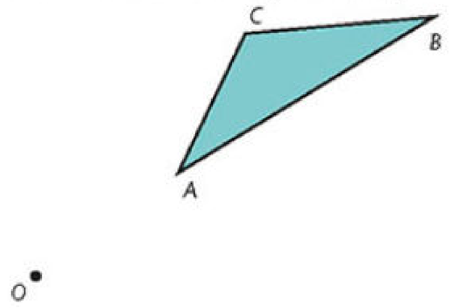
____

Actividad 4. Reúnanse en equipo y desarrollen lo que se pide en sus cuadernos. Al terminar, comparen sus trazos y comenten sus procedimientos. Validen sus resultados con ayuda de su profesor.

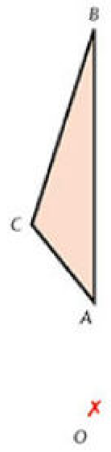
a) Apliquen a la siguiente línea una rotación de 30° respecto al punto *O*. Para ello, coloquen un punto *A'* tal que el segmento *OA'* mida lo mismo que el segmento *OA*, y que estos formen un ángulo de 30°. Repitan para el punto *B*, colocando el punto *B'*. Finalmente, tracen el segmento *A'B'*.



b) Ahora, apliquen una rotación de 60° al triángulo *ABC*, respecto al punto *O*.



Actividad 5. Considera como centro de rotación el punto *O* y aplícale al triángulo *ABC* una rotación de 45° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Comenta con tu grupo el aspecto de la nueva figura y lleguen a una conclusión grupal.



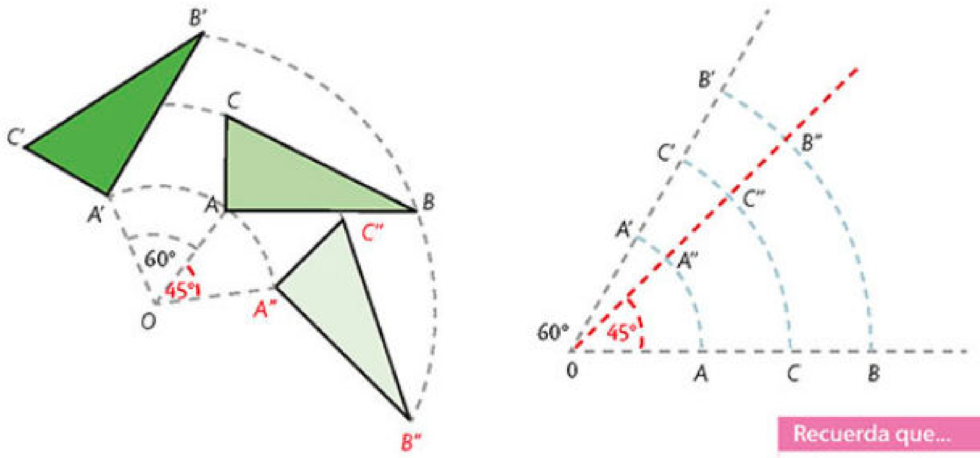
Razono

¿Es más preciso medir con compás que con regla graduada? Coméntalo con tus compañeros y profesor, aportando argumentos.

Investigo

Una de las razones por las que una circunferencia tiene 360°, es que este número tiene bastantes divisores, y nos da medidas fáciles de manejar. ¿Cuáles son estos divisores, y a qué ángulos pertenecen?

Actividad 6. Observen en el plano los movimientos que se aplicaron al triángulo *ABC*, consideren el punto *O* como centro de rotación. Contesten en equipo de cuáles movimientos se trata.



Noten que al triángulo *ABC* se le aplicó una rotación de 45° en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj y una rotación de 60° en sentido contrario. Contesten:

a) ¿Cuánto mide el ángulo *AOA'*?

b) ¿Cuánto mide el ángulo *AOA''*?

c) ¿La medida del arco *AA'* es distinta o es igual en el ángulo auxiliar que entre los triángulos *ABC* y *A'B'C'*?

d) ¿La medida del arco *BB'* es distinta o es igual en el ángulo auxiliar que entre los triángulos *ABC* y *A'B'C'*?

e) ¿La medida del arco *CC'* es distinta o es igual en el ángulo auxiliar que entre los triángulos *ABC* y *A'B'C'*?

f) Comprueba que suceda lo mismo con los arcos del ángulo de 45° y los triángulos *ABC* y *A''B''C''*.
- ¿Se conserva la forma de la figura al aplicarle rotación?
- ¿Cuáles de las medidas de los ángulos se conservan al aplicarle rotación a la figura?

g) En los triángulos *A'B'C'* y *A''B''C''*, ¿cuáles medidas de los lados homólogos del triángulo *ABC* se conservan?

Recuerda que...

Si la *rotación* de una figura se da en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj analógico, se considera que el *ángulo de rotación* es positivo; si se mueve en el sentido de las manecillas se considera que el ángulo de rotación es negativo.

Investigo

Alguna vez has notado que tu calculadora puede hacer cálculos no solo en grados sino también en radianes. Investiga la definición de radián y su equivalencia con los grados.

PARA TENERLO PRESENTE

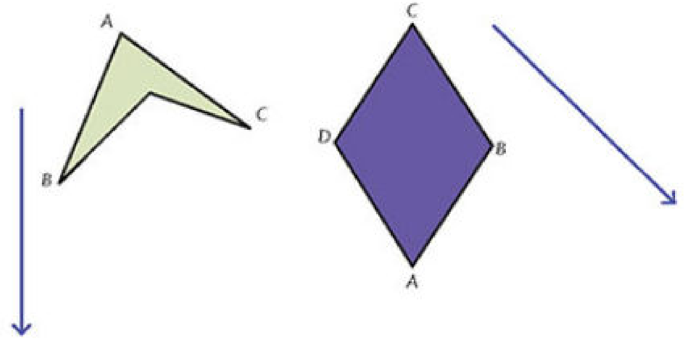
Existen dos procedimientos por medio de los cuales es posible mover una figura en un plano.

El primero se llama *traslación*, que corresponde a trasladar o recorrer una figura de un sitio a otro. El segundo se llama *rotación*, que corresponde a girar un objeto con respecto a un punto llamado centro de rotación.

PARA TERMINAR

Contesta de manera individual lo que se plantea a continuación.

1. Traslada las siguientes figuras, considerando la dirección y medida de la directriz en cada caso. Compara tus resultados y procedimiento con los del compañero más cercano y concluyan acerca de las propiedades de la traslación.



a) Anota las propiedades de la traslación. ______________________

____

Al trasladar una figura:

a) ¿Cómo resultan sus lados homólogos? ______________________

____

b) ¿Qué medidas de la figura original se conservan? ______________________

____

c) ¿La medida de los ángulos correspondientes se conserva? Explica. ______________________

____

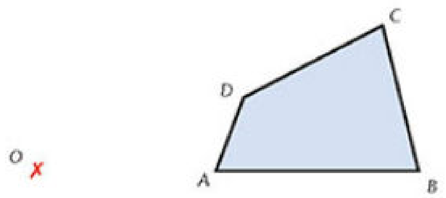
d) ¿La distancia entre los vértices correspondientes se modifica? Explica. ______________________

____

Aplicación

Cada 23 h y 56 min la Tierra da una vuelta completa alrededor de un eje ideal que pasa por los polos. A dicho movimiento se debe la sucesión de días y noches. Cuando una mitad del globo terrestre queda iluminada, en este lado es de día mientras que en la mitad oscura es de noche. En este movimiento, los distintos continentes pasan del día a la noche y de la noche al día. ¿Cómo se le llama a este tipo de movimiento? Si no lo recuerdas, revisa tus apuntes de Geografía, seguramente ahí encontrarás más información.

2. Considera como centro de rotación el punto marcado con *O* y aplica al cuadrilátero *ABCD* una rotación de 90° en sentido del movimiento de las manecillas del reloj.



Para comprobar el resultado, compara tu trazo con el de tu compañero más cercano. Después, contesta:

a) ¿Se conserva la forma del cuadrilátero?

____

b) ¿Los lados homólogos mantienen la misma medida? Explica.

____

c) ¿Los ángulos homólogos mantienen la misma medida? Explica.

____

Aplicación

Algunos programas de computadora utilizados por arquitectos y diseñadores tienen una función para rotar y trasladar las figuras con la finalidad de observarlas desde todos los ángulos y analizar el costo que tendrá producirlas, así como la dificultad que tendrá su construcción.

REFLEXIONA Y RESPONDE

Al aplicar un movimiento de rotación a una figura en el plano:

a) ¿Cómo resultan sus lados homólogos?

____

b) ¿Qué medidas de la figura original se conservan?

____

c) ¿La medida de los ángulos correspondientes se conserva?

____

d) ¿La distancia entre los vértices correspondientes se modifica?

____

e) ¿De qué medida debe ser el ángulo de rotación que se aplica en la figura para que regrese a la posición de origen?

____

EJE **FORMA, ESPACIO Y MEDIDA**

TEMA **Figuras y cuerpos**

Contenido

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

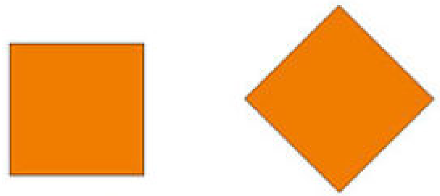
2.3. Simetría, rotación y traslación

LO QUE SÉ

Resuelve lo siguiente de manera individual.

1. Observa los pares de figuras y determina si la figura de la derecha se puede obtener a partir de la figura de la izquierda por medio de una rotación, si es su reflejo o ninguna de las anteriores.

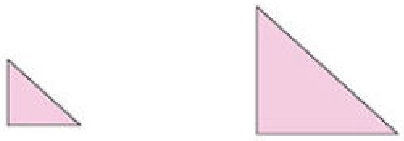
a) ____________



b) ____________

c) ____________

d) ____________



Comparte tus respuestas con el grupo y tu profesor. Si hubiera diferencias, coméntenlas y corrijan si fuera necesario.

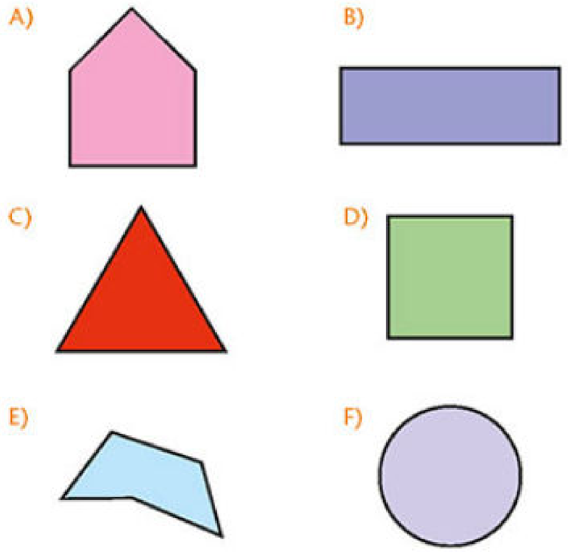
Usa las TIC

¿Conoces a Maurits Cornelis Escher? Fue un artista holandés que utilizaba la simetría para crear sus obras: mundos fantásticos metamorfosis y figuras imposibles. Puedes encontrar ejemplos de cómo usó técnicas matemáticas en sus obras en la página *Matemáticas y Escher* http://goo.gl/Zae6M (consultado el 2 de diciembre de 2016).

CONSTRUYO

Organícense en equipos y resuelvan lo que se indica a continuación.

Actividad 1. Calquen las siguientes figuras en hojas de colores y recórtenlas.



- Tomen la primera figura. ¿Es posible hacer en ella un doblez de manera que se obtengan dos mitades, con la misma forma y que puedan colocarse exactamente una sobre la otra?
- Si logran encontrar ese doblez, márquenlo con plumón.
- Continúen con otro doblez si se cumplen las condiciones señaladas inicialmente.
- Repitan el procedimiento para todas las figuras.

a) Completen la tabla con el número de dichos dobleces para cada figura.

Figura	Dobleces
A	
B	
C	
D	
E	
F	

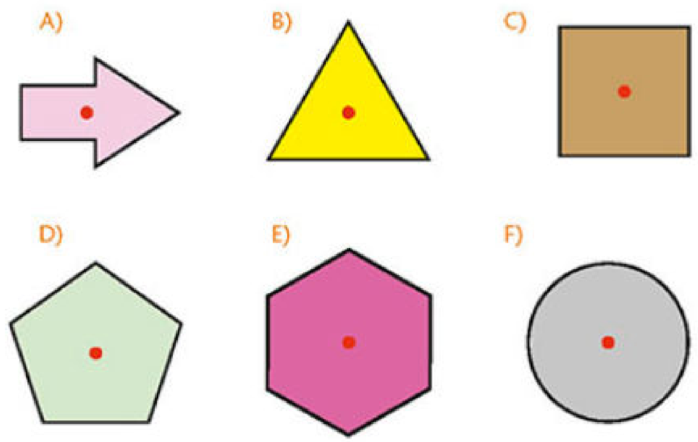
b) ¿Qué característica tiene la figura *F* con respecto a los dobleces que pueden hacerse en ella? ____

c) Comenten con sus compañeros los procedimientos que utilizaron y comparen sus resultados. Corrijan si es necesario.

¿Sabías que...

Decorar con mosaicos se considera un arte? La palabra *mosaico* significa "obra inspirada por las musas". Su origen se sitúa en Grecia. Los primeros mosaicos datan del siglo V a. n. e; la técnica donde el tema principal son las figuras geométricas se conoce como *Opus signinum*.

Actividad 2. Consideren ahora las figuras, cópienlas en hojas de colores y recórtenlas.



- Tomen la primera figura. Coloquen la punta de un clip, o de tu pluma, sobre el punto rojo, de manera que la figura pueda girar libremente. ¿Es posible rotar esta figura de manera que quede igual que al inicio sin que dé la vuelta completa?
- Repitan el procedimiento anterior con las demás figuras. En caso de que sea posible obtener a la figura en una posición idéntica a la original antes de dar una vuelta completa, registra cuántas veces ocurre esto. Por ejemplo, para el triángulo ocurre dos veces, pues cada una de sus puntas podrá ocupar el lugar que ocupaba la punta de arriba.

a) Completen la tabla con el número de giros que apliquen a cada figura.

Figura	Giros
A	
B	2
C	
D	
E	
F	

b) ¿Guarda alguna relación el número de veces que esto ocurre con el número de lados de la figura? ____________________

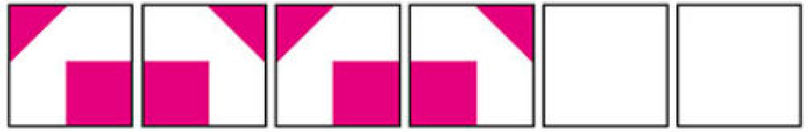
c) ¿Qué observan en la figura F? ____________________

d) Comenten con sus compañeros los procedimientos que utilizaron y comparen sus resultados. Corrijan si es necesario.

PARA TENERLO PRESENTE

Cuando se trabaja con transformaciones geométricas se encuentra que toda figura puede cambiar de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones. Una manera de apreciar estas transformaciones es identificando sus elementos, como los lados homólogos, la imagen de un punto, de un vértice, sus ángulos, la dirección en que se mueve una figura y el sentido, entre otros.

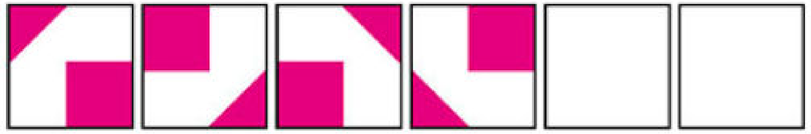
Actividad 3. Completen las secuencias y respondan lo que se solicita.



Compara tus resultados con los del compañero más cercano, comenten acerca de sus procedimientos de solución para cada caso.

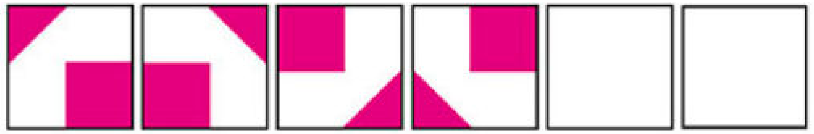
a) ¿Qué tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) se aplicó a esta figura? ____________________

b) ¿Qué propiedades de la figura se conservan? ____________________



c) ¿Qué tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) se aplicó a esta figura? ____________________

d) ¿Qué propiedades de la figura se conservan? ____________________



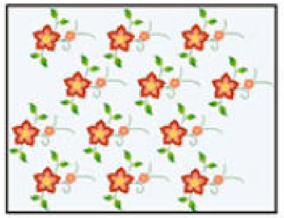
e) ¿Qué tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) se aplicó a esta figura? ____________________

f) ¿Qué propiedades de la figura se conservan? ____________________

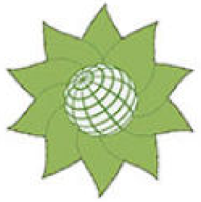
¿Sabías que...

A la utilización de un *patrón geométrico* para cubrir un plano, sin que queden huecos o se superpongan las figuras, se le conoce como *teselado* o *teselación*?

Actividad 4. Analicen los siguientes mosaicos y logotipos e identifiquen el patrón con el que, a partir de diferentes transformaciones, rotaciones, traslaciones o reflexiones, se diseñaron. Anoten sobre la línea la respuesta a la que lleguen en consenso.



a) ______________________ b) ______________________



c) ______________________ d) ______________________

e) ______________________

Actividad 5. Tracen en el siguiente espacio una figura geométrica y formen un mosaico aplicando las diferentes maneras de composición.

a) Reflexión

b) Rotación

c) Traslación

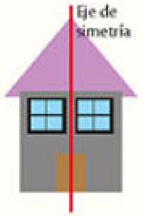
PARA TENERLO PRESENTE

Llamamos *reflexión* al procedimiento por el que se obtiene la imagen en el espejo (que puede ser imaginario) de cierta figura.

En caso de que al efectuar una reflexión obtengamos una imagen idéntica a la figura, decimos que esta tiene *simetría axial*.

Esto equivale a encontrar un eje tal que pudiéramos doblar la figura y superponerlo perfectamente. Dicho eje se llama *eje de simetría*.

Por otro lado, decimos que una figura tiene *simetría central* cuando es posible rotarla menos de una vuelta completa de tal manera que obtengamos una figura idéntica. Dicha rotación debe hacerse respecto al centro de la figura, el cual recibe el nombre de *centro de rotación*.



Usa las TIC

Para conocer más acerca del diseño de mosaicos, visita http://goo.gl/8gSTv (consultado el 2 de diciembre de 2016), en este sitio puedes apreciar algunos mosaicos del artista M.C. Escher.

Aplicación

En matemáticas se estudian las propiedades y características de objetos en espacios de diferentes dimensiones. Los *sólidos de revolución* son figuras que se generan al rotar rectas, parábolas, circunferencias, etcétera, alrededor de un *eje del plano cartesiano*. La topología es la encargada de estudiar las propiedades de estos objetos.

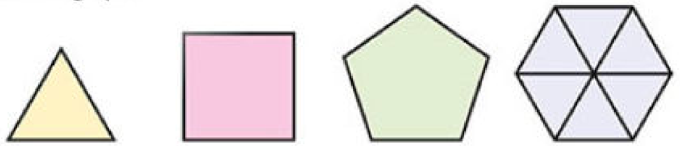
¿Sabías que...

En 1920, la matemática alemana Emmy Noether desarrolló un formidable teorema matemático que relaciona cantidades que se conservan, como la energía, con la simetría de un sistema físico?

PARA TERMINAR

Resuelve de manera individual lo que se plantea enseguida.

1. Considera las siguientes figuras regulares y responde lo que se pide en tu cuaderno.
   a) ¿Presentan simetría axial? Si así es, ¿cuántos ejes de simetría tiene cada una?
   b) ¿Presentan simetría central? Si así es, ¿cuántas veces puede girar 45° la figura antes de dar la vuelta completa?
   c) ¿Puedes afirmar algo respecto a la simetría de cada polígono regular?
   d) Forma con ellas, o con alguna de ellas, un diseño que cubra el plano. Presenta tu diseño al grupo.



Glosario

Polígono. Es una figura geométrica de varios lados. Un polígono regular es aquel en el que todos sus lados miden lo mismo, al igual que sus ángulos internos.

REFLEXIONA Y RESPONDE

Al contestar las siguientes preguntas, argumenta tus respuestas.

¿Qué características deben tener las figuras para cubrir el plano sin que queden espacios entre ellas?

____

____

¿Con cualquier figura regular se cubre el plano? ____________________

____

Investigo

Investiga cómo se puede generar la forma de una dona, mejor conocida en matemáticas como toro de revolución, al hacer una rotación alrededor de un eje del plano cartesiano. Averigua qué se debe rotar para lograrlo. Investiga que otros sólidos de revolución existen y cómo se generan.

2. Dibuja en el siguiente espacio algún LOGOTIPO, describe qué figura básica o motivo contiene y el tipo de transformación que se le aplicó.

Figura básica/motivo: ______________________________

Su transformación consiste en: ______________________________

____

2.4. Cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo

Contenido

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

LO QUE SÉ

Resuelvan lo que se pide de manera grupal.

1. Contesten las siguientes preguntas y tracen ejemplos que sustenten su respuesta.

   a) ¿Qué características tienen los triángulos equiláteros? ______________

   ____

   b) ¿Qué características tienen los triángulos isósceles? ______________

   ____

   c) ¿Qué características tienen los triángulos escalenos? ______________

   ____

Razono

¿Es posible qué un triángulo tenga dos ángulos obtusos o dos ángulos rectos? ¿Por qué? Comenta esta cuestión con tus compañeros.

Recuerda que...

Un ángulo **recto** es aquel que mide 90°. Los ángulos menores que 90° se llaman **agudos**, y los ángulos los mayores que 90° pero menores de 180° se llaman **obtusos**.

d) ¿Qué características tienen los triángulos rectángulos? ____________

____

____

____

e) ¿Es posible construir un triángulo rectángulo equilátero? ¿Por qué? ____________

____

f) ¿Y un triángulo rectángulo isósceles? ¿O uno escaleno? Argumenten sus respuestas.

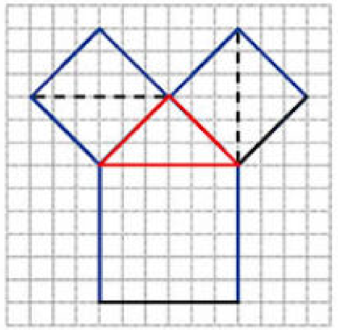
____

____

CONSTRUYO

Reúnanse en equipos para resolver lo que se indica en las siguientes actividades.

Actividad 1. Observen los cuadrados que se construyeron sobre los lados del siguiente triángulo rectángulo isósceles y contesten las preguntas. Comenten las respuestas en grupo.



a) ¿Qué diferencia hay entre las áreas de los cuadrados pequeños?

____

b) ¿Cómo son entre sí las áreas de los triángulos que se forman en los cuadrados pequeños? ____________

c) ¿Cuánto mide el área del cuadrado mayor? ____________ u^2.

d) ¿Se pueden acomodar los cuatro triángulos que se obtienen de los cuadrados, de tal manera que ocupen el área del cuadrado mayor? ____________

e) ¿Existe alguna relación entre las áreas de los dos cuadrados pequeños y el área del cuadrado mayor? ____________

____

Actividad 2. Reúnanse en equipo y analicen lo que se pide a continuación.

1. Comparen las áreas de las siguientes figuras y respondan en su cuaderno.

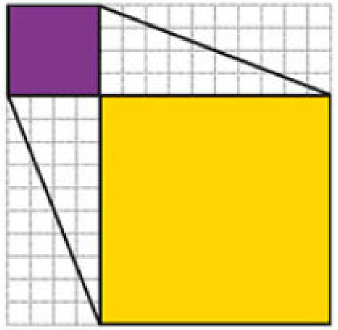


Figura 1

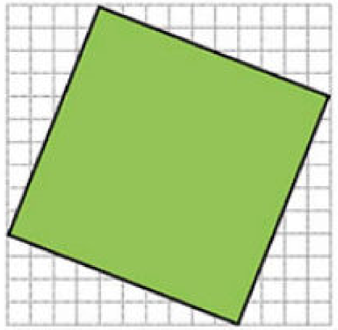


Figura 2

a) ¿Cuál es el área total de cada figura?
b) ¿Cuántos triángulos rectángulos aparecen en cada una? ¿Cómo son entre ellos?
c) Tomando en cuenta lo anterior, ¿qué relación existe entre las áreas de los cuadrados de las figuras 1 y 2?

2. En las siguientes figuras, ¿cuál es la relación entre las áreas de los cuadrados de las figuras I y II? Comenten sus respuestas y lleguen a una conclusión.

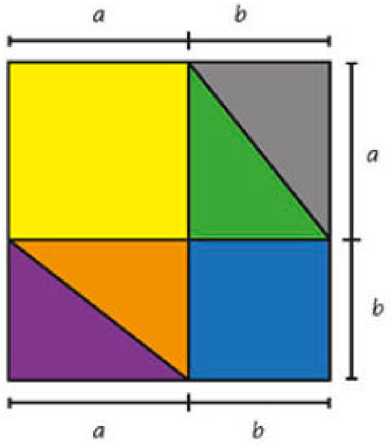


Figura I

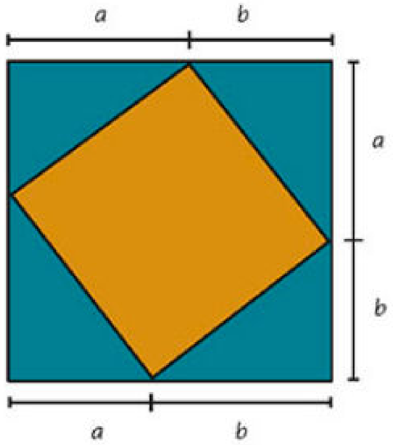


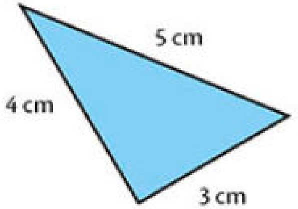
Figura II

PARA TENERLO PRESENTE

Cualquier triángulo puede dividirse en dos triángulos rectángulos trazando una *perpendicular* de su base hasta su otro vértice. También es posible dividir cualquier polígono (sea o no regular) en triángulos rectángulos.

Resuelvan el siguiente problema. Utilicen hojas de colores, tijeras y juego de geometría.

1. Construyan en su cuaderno tres piezas cuadradas cuyas medidas coincidan con cada uno de los lados del triángulo que se muestra y contesten:
   a) ¿Cuánto mide el área de cada una de esas piezas cuadradas? ______________
   b) ¿Qué relación existe entre las áreas de las tres piezas? ______________
   ____
   c) ¿De qué tipo de triángulo se trata? ______________
   d) Comenten sus razonamientos y argumentos, y lleguen a una respuesta en común.



2. Midan los lados y ángulos de los siguientes triángulos, calculen el área de los cuadrados que pueden trazarse adyacentes a cada lado de los triángulos y completen la tabla.

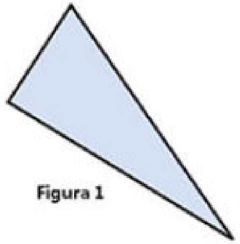


Figura 1

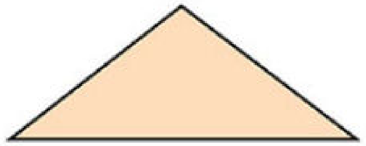


Figura 2

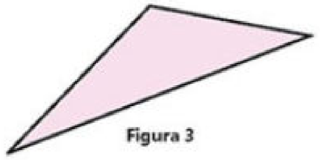


Figura 3

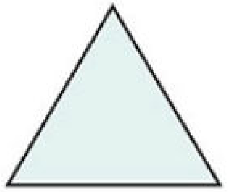


Figura 4

Recuerda que...

En un triángulo rectángulo, a los lados que forman el ángulo recto se les llaman *catetos* y al lado opuesto al ángulo recto se le llama *hipotenusa*.

Figura	Dada la medida de sus ángulos, el triángulo se llama:	Dada la medida de sus lados, el triángulo se llama:	Suma de las áreas de los cuadrados de los lados menores	Área del cuadrado del lado mayor
1				
2				
3				
4				

REFLEXIONA Y RESPONDE

¿En qué tipo de triángulos se cumple que la suma de las áreas de los cuadrados menores es igual al cuadrado del lado mayor? Argumenta tu respuesta.

____

____

____

¿Sucederá lo mismo con las áreas de los cuadrados de la figura III? Compruébalo en tu cuaderno y comenta tu respuesta con el grupo.

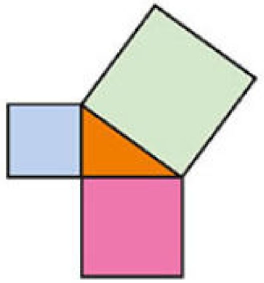
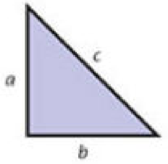


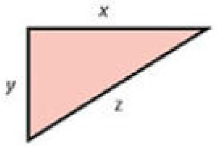
Figura III

Actividad 3. Identifica en los triángulos, según se pida, los catetos o la hipotenusa.

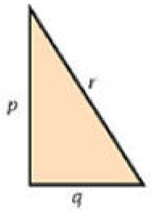
a) Catetos: ________ y ________
Hipotenusa: ________



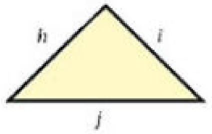
d) Catetos: ________ y ________
Hipotenusa: ________



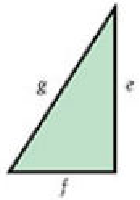
b) Catetos: ________ y ________
Hipotenusa: ________



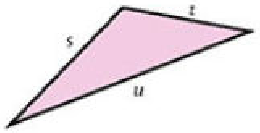
e) Catetos: ________ y ________
Hipotenusa: ________



c) Catetos: ________ y ________
Hipotenusa: ________



f) Catetos: ________ y ________
Hipotenusa: ________



Investigo

Investiga qué ocurre con el área de un cuadrado si se tiene de lado *x*, se traza la diagonal y con esa línea se construye un nuevo cuadrado. ¿Qué relación existe entre las áreas de ambos cuadrados? Así comenzó Pitágoras a analizar lo que conocemos como su teorema más famoso.

PARA TENERLO PRESENTE

Llamamos *triángulos rectángulos* a los que poseen un ángulo recto. En estos triángulos se cumple que el cuadrado de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Usa las TIC

Aplica tus conocimientos acerca de triángulos rectángulos en la vida cotidiana con la actividad. "Resolución de triángulos rectángulos" http://goo.gl/g7tS3 (consultado el 2 de diciembre de 2016). Toma nota en tu cuaderno de la información que te parezca relevante y comparte tus comentarios en la siguiente clase con el resto del grupo.

PARA TERMINAR

Enseguida, resuelve lo que se pide, de manera individual.

1. Traza en el siguiente espacio los triángulos que se piden, mide sus ángulos y determina si se trata de un triángulo rectángulo. Comprueba si en los triángulos rectángulos que encuentres la suma de los cuadrados que se forma en los catetos es equivalente al cuadrado que se forma en la hipotenusa. Muestra tus resultados al profesor y valida tus respuestas.

   a) Sus lados miden 3, 4 y 5 cm, respectivamente.

   b) Sus lados miden 4, 5 y 7 cm, respectivamente.

   c) Sus lados miden 12, 13 y 5 cm, respectivamente.

PARA TENERLO PRESENTE

En los triángulos rectángulos, la suma de las áreas de los cuadrados que se construyen en los catetos es equivalente al área del cuadrado que se construye en la hipotenusa, a esta propiedad se le define como el *teorema de Pitágoras*. Esta propiedad también puede enunciarse como: *"En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"*.

Contenido

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

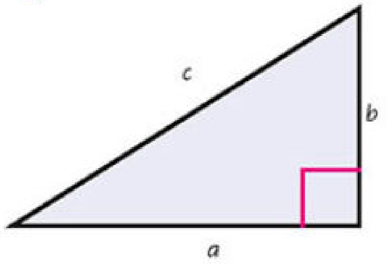
2.5. Teorema de Pitágoras

LO QUE SÉ

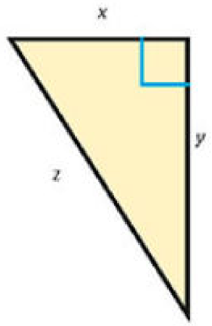
De manera individual, lleva a cabo lo que se pide a continuación.

1. Con ayuda de tu regla y compás, mide los siguientes triángulos rectángulos y completa la relación que se indica. En grupo, analicen los resultados.

a)



b)



$c^2 =$ ____________	$x^2 =$ ____________
$c =$ ____________	$x =$ ____________
$b^2 =$ ____________	$y^2 =$ ____________
$b =$ ____________	$y =$ ____________
$a^2 =$ ____________	$z^2 =$ ____________
$a =$ ____________	$z =$ ____________

2. En equipo, completen las siguientes frases y, al finalizar, comenten en el grupo sus respuestas.

   a) Los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo se llaman ____________.

   b) El lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo recibe el nombre de ____________.

Razono

Resuelve los siguientes problemas.

a) $(9^2) + (9^2) =$
b) $(5^2) - (3^2) =$
c) $(4^2) + (3^2) =$
d) $(6^2) - (4^2) =$
e) $(7^2) + (7^2) =$

¿Qué estrategias de solución utilizaste? Coméntalas y compáralas con las de tus compañeros.

¿Sabías que...

Pitágoras (571 - 497 a. n. e.) fue matemático y filósofo. Fundó dos escuelas en Grecia y fue el primero en admitir la inscripción de mujeres.

CONSTRUYO

¿Sabías que...

A las ternas de números que cumplen la condición del teorema de Pitágoras se les llama *ternas pitagóricas*.

Reúnanse en parejas o en equipos para resolver lo que se indica a continuación.

Actividad 1. Se tiene un triángulo rectángulo de lados a, b y c.

a) Conociendo que a los catetos se les asignaron las letras a y b, escribe la expresión algebraica que identifica al triángulo. ______________________

b) Al finalizar, compara tu resultado con el que obtuvo el compañero más cercano y argumenten en caso de tener diferencias.

Actividad 2. Elaboren una lista de situaciones o lugares que pueden relacionarse con la formación de triángulos rectángulos.

a) Anoten en su cuaderno la situación y elaboren un esquema simple.

b) En cada caso, identifiquen y escriban a qué lados corresponden los catetos y a cuál la hipotenusa. Hagan lo mismo para el ejemplo dado.

c) Luis Emilio descubrió que los números 3, 4 y 5 cumplen con el teorema de Pitágoras; es decir, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ahora está impresionado y quiere saber si hay más ternas de números que cumplan con esa condición. Escribe dos ternas más para ayudarle.

- Primera terna ______________________
- Segunda terna ______________________

Aplicación

Mediante el teorema de Pitágoras se puede calcular la medida de distancias inaccesibles. Es muy importante en estudios físicos o matemáticos en los que se trabaja con espacios que tienen más de dos dimensiones.

Actividad 3. En equipo, resuelvan los siguientes problemas. Elaboren un esquema con el planteamiento del problema y anoten las operaciones desarrolladas. Comenten con el grupo sus resultados y procedimientos.

a) Juan tiene que barrer la azotea de su casa. Para subir 2.5 m que tiene de altura, coloca una escalera cuya base queda a 80 cm del muro. ¿Qué medida debe tener la escalera para alcanzar la azotea?

b) Arturo quiere adornar el frente de un esquinero de forma triangular que tiene 35 cm en cada lado y que coincide con la pared. Ayúdale a encontrar la medida del adorno que debe colocar.

c) Daniel quiere construir un tablero de ajedrez cuya diagonal mida 60 cm. ¿Cuánto debe medir cada lado del tablero?

d) Si cada lado de mi tablero de ajedrez mide 20 cm, ¿cuánto mide la diagonal?

e) Aurelio tiene una escalera de 3.5 m de largo apoyada en la pared y su extremo inferior está una distancia de 1 m de la misma. ¿Qué altura alcanza la escalera?

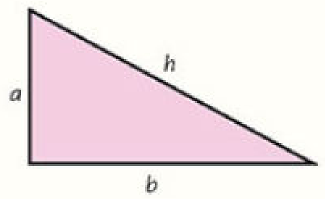
PARA TENERLO PRESENTE

El *teorema de Pitágoras* establece la igualdad:

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Donde a y b representan la medida de los catetos, y h representa la medida de la hipotenusa.

Usando esta fórmula planteamos ecuaciones cuya resolución nos da la medida de un lado, si lo desconocemos.



Aplicación

El teorema de Pitágoras se utiliza indistintamente en varias áreas del conocimiento: matemáticas, ingeniería, física, economía, así como en la construcción de casas y edificios, cuando los ingenieros quieren saber las dimensiones que tendrá cada habitación en el diseño que haya proyectado el arquitecto.

Razono

¿En qué caso sería cierto que la expresión algebraica $2a^2 = c^2$ corresponde al teorema de Pitágoras? Comparte tu razonamiento con el grupo.

Usa las TIC

Si tienes oportunidad de trabajar con una computadora, desarrolla la actividad "Teorema de Pitágoras", en *Geometría dinámica*, EMAT, México, SEP, 2000, pp. 158-159.

Investigo

Pitágoras no solo fue un virtuoso matemático, sino que destacó por sus proyectos de ingeniería. Investiga más acerca de la vida de este personaje quien, por cierto, murió de una manera absurda, ¿sabes cómo fue su muerte?

PARA TERMINAR

De manera individual, responde lo que solicita en cada caso.

1. Resuelve los siguientes problemas. Dibuja del planteamiento del problema y anota tus operaciones. Al finalizar, compara tus resultados con los de tus compañeros.

   a) Para reemplazar un foco fundido se utilizó una escalera de 3 m que se recargó en un poste. Si la altura a la que se encuentra el foco es de 2.4 m, ¿qué distancia hay entre la base de la pared y el pie de la escalera?

   b) Desde la parte alta de un faro de 30 m de altura, un vigía observa un barco y menciona que su telescopio marca que la distancia entre él y la embarcación es de 200 m. ¿A qué distancia de la base del faro se encuentra el barco?

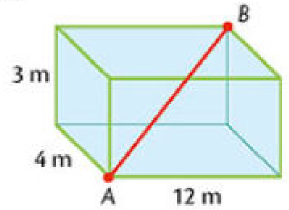
   c) Una persona se encuentra en la parte alta de un edificio de 22 m de altura. Desde ese lugar observa la base de una antena que se encuentra en la parte alta del edificio de enfrente, cuya altura es de 14 m. Si el ancho total de la calle es de 15 m, ¿qué distancia hay entre el observador y la base de la antena?

   d) Calcula la altura de un triángulo equilátero que mide 25 cm por lado.

   e) Calcula la medida de la apotema de un hexágono regular inscrito en un círculo de 10 cm de radio.

2. Una mosca atraviesa volando una bodega desde el punto *A* hasta el punto *B*. La distancia más corta (y menos peligrosa para la mosca) es la de la línea recta que une *A* con *B*.

   a) ¿Qué distancia volará? Pista: para resolver este problema debes aplicar dos veces el teorema de Pitágoras.



   b) Revisa tu respuesta con un compañero y validen sus resultados.

   c) El problema es una situación que representa una situación ficticia, pero sirve para representar un hecho. ¿Qué aplicación real podría tener el teorema de Pitágoras? Plantea ejemplos junto con tu grupo y concluyan entre todos.

Usa las TIC

Si tienes acceso a algún programa de geometría dinámica te sugerimos que hagas una presentación del teorema de Pitágoras. Para practicar más con él, te recomendamos una visita a las siguientes direcciones: http://goo.gl/TVYrH, http://goo.gl/jpnzy (consultados el 2 de diciembre de 2016).

Aplicación

En la representación de las fuerzas se encontró que una fuerza tiene dos componentes: uno horizontal y uno vertical. ¿Se relacionan la fuerza y sus componentes con el teorema de Pitágoras? Presenta un ejemplo y coméntalo con tu grupo.

Contenido

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

2.6. Eventos mutuamente excluyentes y complementarios

LO QUE SÉ

Organícense para resolver lo siguiente según se indica.

1. En equipos, escriban en la tabla siguiente la probabilidad de que al lanzar un dado, el resultado sea...

Evento	Probabilidad
el número 4.	
un número distinto a 4.	
un número par.	
un número non.	
un número menor a 3.	
un número no menor que 3.	

2. En equipos, redacten sobre las líneas las definiciones de los siguientes conceptos.
   a) Eventos complementarios: ______
   b) Eventos mutuamente excluyentes: ______
   c) Eventos simples: ______

3. Ahora que recordaron dichas definiciones, en equipos, analicen los eventos y escriban una *C* si son complementarios; una *E* si son mutuamente excluyentes o una *S* si son simples.

   Consideren el experimento de lanzar un dado.

   a) Si *A* es el evento de que el resultado no caiga par y *B* el evento de que caiga par, ¿cómo son los eventos *A* y *B*? ______
   b) *C* el evento de que resulte el número 2. ______
   c) *D* que resulte 5 y *E* que resulte par. ¿Cómo son los eventos *D* y *E*? ______

   En los siguientes incisos, considera el experimento de lanzar una moneda.

   d) Si *F* es el evento de que resulte sol y *G* es el evento de que resulte águila, ¿cómo son los eventos *F* y *G*? ______
   e) *H* el evento de que su cara sea sol. ______

Considera el experimento de destapar una bebida gaseosa.

   f) *L* el evento de que salga gas. ______

4. Ahora propongan un evento simple, uno mutuamente excluyente y uno complementario. Anótenlos en el espacio que corresponda.
   a) Evento simple: ______
   b) Evento mutuamente excluyente: ______
   c) Evento complementario: ______

5. En una urna hay cinco canicas: una roja, una verde, una azul, una amarilla y una blanca. Si se extrae una canica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que...

Evento	Probabilidad
sea blanca?	
no sea verde?	
sea roja o amarilla?	
sea azul y verde?	

   a) ¿Cuál de los eventos anteriores es simple? ______
   ¿Por qué? ______
   b) ¿Cuáles de los eventos anteriores son complementarios? ______
   ¿Por qué? ______
   c) Considera a los eventos *U* que no sea verde y *V* que sea verde. ¿Cómo son los eventos *U* y *V*? ______
   ¿Por qué? ______
   d) ¿Es posible que la canica sea azul y verde? ______
   ¿Por qué? ______
   e) ¿Es posible que la canica sea roja o amarilla? ______
   ¿Por qué? ______
   f) Comenten en grupo sus respuestas y argumentos.

Aplicación

Para detectar fraudes en los juegos de azar, algunos programas de computadora calculan la probabilidad de que ocurran dos o más eventos mutuamente excluyentes, como por ejemplo, ganar el premio mayor de la lotería y otros juegos de pronósticos. Si se detectan anomalías como una compra súbita y excesiva de boletos, el programa alerta a las autoridades correspondientes.

HISTÓRICAMENTE

Gerolamo Cardano (1501–1576) fue el primer teórico italiano que hizo análisis matemáticos sobre juegos de azar. Cardano escribió, entre 1560 y 1564, una pequeña obra titulada *Liber de ludo aleae (Libro sobre juegos de azar)*, en la que hace referencia a diversos juegos de dados, cartas y ajedrez, incluyendo la aplicación del análisis matemático a tales juegos y algunas técnicas comunes para sacar ventaja.

Recuerda que...

Los eventos que no suceden al mismo tiempo se llaman *mutuamente excluyentes*, por ejemplo: si lanzamos un dado no es posible obtener un número primo y cuatro al mismo tiempo.

Recuerda que...

Se considera *espacio muestral* a la totalidad de posibles resultados que puede tener un evento.

CONSTRUYO

Resuelve las siguientes situaciones como se indica.

Actividad 1. Reúnete con dos compañeros y resuelvan las siguientes situaciones.

Para llevar a cabo un juego, se nombra *A* al primer jugador y *B* al segundo. Se tira un dado y *A* gana si cae un número non, mientras que *B* gana si cae un número par.

a) ¿Cuál es la probabilidad que tiene *A* de ganar?

______

b) ¿Cuál es la probabilidad que tiene *B* de ganar?

______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el jugador *A* o *B*?

______

d) Comenten sus respuestas con otro equipo y validen sus razonamientos.

Actividad 2. Organizados en equipos, resuelvan las siguientes situaciones.

Una bolsa contiene dos canicas rojas y dos amarillas, del mismo tamaño. Por turnos se saca una canica al azar y luego otra, registrando el color de cada una.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga {*RR*}?

______

c) ¿Cuál resultado es complementario de {*RR*}?

______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una canica, esta sea roja?

______

e) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una canica, esta sea amarilla?

______

f) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una canica, esta sea roja o amarilla?

______

g) Discutan sus respuestas y argumentos con otros equipos. Para cada pregunta, validen una sola respuesta entre todo el grupo y su profesor.

Actividad 3. Supongamos que se va la luz en tu casa pero no en la de los vecinos y tus papás te piden que los acompañes a revisar la caja de fusibles. Al bajar el interruptor y abrir la caja se observa que hay cinco fusibles y al menos uno debe estar dañado. Sin embargo, resulta la duda: ¿y si no solo es uno el que está dañado? Tomando en cuenta la interrogante, responde las siguientes preguntas.

a) Determina el espacio muestral de este experimento. ______

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento *A*: ninguno de los cinco fusibles son defectuosos?

______

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento *B*: uno de los cinco fusibles es defectuoso?

______

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento *C*: uno o más fusibles son defectuosos?

______

e) ¿Cuál es la probabilidad del evento *D*: los cinco fusibles son defectuosos?

______

f) ¿Cuál es la probabilidad del evento *A* o *B*?

______

g) ¿Cuál es la probabilidad del evento *A* o *D*?

______

h) ¿Cuál es la probabilidad del evento *B* o *D*?

______

i) ¿Cuál es la probabilidad del evento *A* o *C*?

______

j) Comparte tus respuestas y argumentos al grupo y entre todos lleguen a una respuesta en común para cada caso.

Actividad 4. Cierto cometa se observa cada 15 años; la probabilidad de que regrese en 15 años se puede calificar como muy escasa, escasa, cercana, muy cercana o casi segura es: 0.09, 0.14, 0.19, 0.24 y 0.34, respectivamente.

Calcula la probabilidad de que el evento resulte:

a) Muy escasa o escasa. ______

b) Cercana o muy cercana. ______

c) Muy cercana o casi segura. ______

d) ¿Algún par de los eventos anteriores resulta complementario? Argumenta tu respuesta. ______

e) Al terminar, comparte tus argumentos con el grupo y el profesor. Corrijan si fuera necesario.

Actividad 5. En un grupo hay 10 hombres y 20 mujeres, de ellos la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños.

a) Calcula la probabilidad de que una persona, elegida al azar, sea hombre. ______

b) Calcula la probabilidad de que una persona, elegida al azar, tenga los ojos castaños. ______

c) Calcula la probabilidad de que una persona, elegida al azar, sea hombre o tenga los ojos castaños. ______

d) Calcula la probabilidad de que una persona, elegida al azar, sea hombre y tenga los ojos castaños. ______

e) ¿Cuál es la diferencia entre los dos últimos eventos? ______

f) Al terminar, comparte tus argumentos con el grupo y el profesor. Corrijan si fuera necesario.

Razono

Resuelve mediante cálculo mental:

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$

b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} =$

c) $\frac{3}{7} + \frac{1}{8} =$

d) $\frac{1}{8} + \frac{3}{6} =$

e) $\frac{1}{9} + \frac{2}{3} =$

Comenta y comparte tus procedimientos de solución.

¿Por qué es importante que puedas resolver operaciones como las de esta actividad al estudiar este tema?

¿Sabías que...

Los cometas son trozos enormes de hielo que tienen una trayectoria en forma de elipse y cada cierto tiempo se pueden apreciar desde nuestro planeta. El más famoso es el cometa Halley, que regresa cada 86 años. La última vez que pasó por la Tierra fue en 1986?

Actividad 6. Una ruleta está graduada con números del 1 al 6 y con letras de la *A* a la *F*.

Investigo

Investiga cuál sería la probabilidad combinada de ganar un juego de azar de pronósticos y la Lotería. Calcula cuánto dinero deberías gastar para tener una probabilidad de 1 para ganar.

Aplicación

El cálculo de la probabilidad de que ocurran eventos aleatorios (al azar) está profundamente implicado en la ciencia. Teorías como la mecánica cuántica o la evolución requieren el estudio de fenómenos que ocurren aleatoriamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que después de girarla, la pelotita se detenga en un número impar? __________
b) ¿Cuál es la probabilidad de que después de girarla, la pelotita se detenga en la letra *F*? __________
c) ¿Cuál es la probabilidad de que después de girarla, la pelotita se detenga en un número impar o la letra *F*? __________
d) ¿Cuál es la probabilidad de que después de girarla, la pelotita se detenga en un número menor que 5? __________
e) ¿Cuál es la probabilidad de que después de girarla, la pelotita se detenga en una letra vocal? __________
f) ¿Cuál es la probabilidad de que después de girarla, la pelotita se detenga en un número menor que 5 y una letra vocal? __________

¿Sabías que...

El cálculo de la probabilidad en los juegos de azar te da tanta ventaja que en los casinos de Las Vegas está prohibido mantener un control de las cartas que salen?

Actividad 7. Hay un paquete con cinco libros: uno de español, uno de historia, uno de inglés, uno de química y uno de matemáticas. Si se toma uno de ellos al azar, calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

a) Que sea de matemáticas o de historia.

____

b) Que sea de inglés, español o historia.

____

c) Que sea de química, historia, inglés o matemáticas.

____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y corrijan, en caso de ser necesario.

Actividad 8. En una caja hay tarjetas numeradas del 10 al 30 y se saca una al azar. En equipo, calculen las probabilidades que se piden.

a) ¿Cuántas tarjetas hay en total?

____

b) Calculen la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea tres.

____

c) Calculen la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea número impar.

____

d) Calculen la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea número par.

____

e) Calculen la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea 11.

____

f) Calculen la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea un múltiplo de 2 mayor o igual que 4.

____

g) Calculen la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea par o impar.

____

h) Calculen la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea 3 o múltiplo de 2.

____

Actividad 9. Se tienen cinco tómbolas con el nombre de 24 países de cinco continentes para participar en un torneo de futbol: Francia, Italia, China, Micronesia, Brasil, Japón, Taiwán, Rumania, Estados Unidos, Uruguay, Portugal, Inglaterra, Irak, España, Australia, Honduras, Nigeria, India, Fiji, Congo, Argentina, Dinamarca, Ruanda y México. Cada tómbola representa un continente.

Usa las TIC

En el siguiente enlace encontrarás información acerca del tema de probabilidad http://goo.gl/gybG6 (consultado el 2 de diciembre de 2016).

1. Escribe el espacio muestral para cada tómbola.
   a) Europa __________
   b) América __________
   c) Asia __________
   d) África __________
   e) Oceanía __________

2. Si potencialmente todos tienen la misma probabilidad de ganar, calcula la probabilidad de que el ganador sea de Europa o África.

____

a) Calculen la probabilidad de que el ganador sea de Asia o América.

____

b) Calculen la probabilidad de que el ganador sea de Oceanía o Europa.

____

c) Calculen la probabilidad de que el ganador sea de Europa o América.

____

d) Calculen la probabilidad de que el ganador sea de Europa o América o Asia.

____

¿Sabías que...

Cuando tiramos un volado, esperamos que el resultado sea águila o sol. Sin embargo, estas no son las únicas posibilidades. La moneda podría caer de lado (aunque es sumamente improbable). Eventos que parecen complementarios (como águila y sol) no lo son totalmente. ¿Qué posibilidades rodean a cada evento que sucede?

PARA TENERLO PRESENTE

Si dos o más eventos son excluyentes, la probabilidad de que ocurran se calcula sumando la probabilidad de que ocurra cada uno por separado. A este tipo de procedimiento se le conoce como *regla de la suma*.

PARA TERMINAR

Resuelve lo siguiente de manera individual.

1. Una ruleta tiene números del 1 al 32 y en colores distintos: en verde están los números impares menores que 12; en naranja los números pares mayores que 15; en azul, los números impares mayores que 12 y en rojo los pares menores que 15. Si se hace girar la ruleta, calcula la probabilidad de que la pelotita se detenga en un gajo:

   a) Naranja o rojo. ______________________________
   b) Verde o azul. ______________________________
   c) Verde o rojo. ______________________________
   d) Naranja, verde o azul. ______________________________

2. Se lanzan simultáneamente dos dados. Calcula la probabilidad de obtener dos números cuya suma sea:

   a) 4 u 8 ______________________________
   b) 7 o 10 ______________________________
   c) 2 o 12 ______________________________

3. ¿Existen eventos que sean...

   a) mutuamente excluyentes y complementarios? ____________________
   Por ejemplo ______________________________
   b) simples y complementarios? ____________________
   Por ejemplo ______________________________
   c) simples y mutuamente excluyentes? ____________________
   Por ejemplo ______________________________

REFLEXIONA Y RESPONDE

a) ¿La regla de la suma solo se aplica para eventos mutuamente excluyentes? Escribe algunos ejemplos en tu cuaderno.

EVALUÁNDOME

I. Resuelve cada una de las siguientes situaciones y escribe en el paréntesis de la derecha la letra del inciso que contenga la respuesta correcta. Al finalizar, revisen en grupo esta prueba, sus resultados y procedimientos.

1. El área de un terreno de forma rectangular mide 600 m^2 y se puede expresar mediante la ecuación $x^2 + 49x + 600 = 0$. ¿Cuánto miden respectivamente sus lados?

   a) 10 m y 60 m   c) 20 m y 30 m
   b) 15 m y 40 m   d) 24 m y 25 m

2. El resultado de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ es:

   a) -1 y -6 c) 1 y -6
   b) -1 y 6   d) 1 y 6

3. El producto de dos números es -84 y su suma es cinco. ¿Cuál es el modelo algebraico que corresponde a dicha situación?

   a) $-84x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 + 5x - 84 = 0$
   b) $x^2 - 84x + 5 = 0$ d) $5x^2 - 84x = 0$

4. Sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen cuadrados. El cuadrado mayor tiene un área de 100 cm^2, el más pequeño tiene 36 cm^2 y el mediano, 64 cm^2. ¿Cómo se expresa la relación que existe entre las áreas de los cuadrados menores de los triángulos rectángulos respecto a la del cuadrado mayor?

   a) En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados que se forman en los catetos es igual al cuadrado que se forma sobre la hipotenusa.

   b) En un triángulo rectángulo, los cuadrados que se forman sobre sus catetos siempre tendrán como área un múltiplo de cuatro.

   c) La suma de los lados menores de un triángulo rectángulo, es decir, sus catetos, siempre será igual al lado mayor, conocido como hipotenusa.

   d) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa se obtiene a partir de sumar los cuadrados que se forman sobre los catetos.

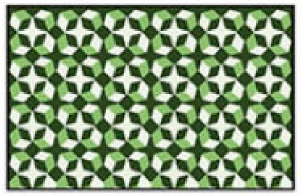
5. En una de las escuadras del juego de geometría de Renata, dos de sus lados miden 7 cm y 12 cm, respectivamente, ¿cuánto mide el lado que no se midió?

   a) 9.89 cm   c) 13.89 cm
   b) 12 cm   d) 19 cm

6. La base de un triángulo isósceles mide 16 cm y su altura 20 cm, ¿cuánto mide cada uno de sus lados homólogos?

   a) 18.3 cm   c) 21.5 cm
   b) 20 cm   d) 28 cm

7. Observa la primera línea de cubos del siguiente mosaico oaxaqueño. ¿Qué movimiento se aplicó al cubo original para ubicarse en la segunda posición?



a) Traslación
c) Simetría axial
b) Rotación
d) Simetría central

8. Se lanzarán al mismo tiempo dos dados de diferente tamaño, marcados con puntos del 1 al 6, ¿cuál es la probabilidad de que ambos caigan en 4?

a) $\frac{4}{6}$
c) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{2}{6}$
d) $\frac{1}{36}$

II. Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno y anota la respuesta sobre la línea.

9. Don Pascual quiere comprar un terreno de forma rectangular, que vale $1 400 cada metro cuadrado. Lo que sabe es que la diagonal mide 75 m, que es semejante a otro terreno –que compró a las mismas personas– cuyos lados miden 36 m y 48 m, respectivamente.

a) ¿Qué significa que un triángulo sea semejante a otro?

____

b) ¿Cuánto mide la diagonal del terreno que compró anteriormente?

____

c) ¿Cómo se calcula la diagonal de un rectángulo?

____

d) ¿El terreno que quiere comprar es mayor o menor que el compró anteriormente?

____

e) ¿Conociendo solo las diagonales pueden saberse las medidas del terreno? Justifica tu respuesta.

____

f) ¿Cómo pueden calcularse las medidas del terreno que se quiere comprar?

____

g) ¿Cuánto miden los lados del nuevo terreno?

____

h) Calcula el precio del nuevo terreno.

____

10. Mis vecinos rentaron una casa con alberca para festejar su aniversario de bodas. Al revisar las llaves de llenado se dan cuenta de que dos de ellas no funcionan. A fin de tener todo listo, justo a tiempo para cuando lleguen los invitados, quieren determinar a qué hora abrirán la llave. Se encuentran con la siguiente información: "La alberca tiene una profundidad de 1.5 m, 8 m de largo y 5 m de ancho; la llave A tarda dos veces más que la B y ésta tarda dos veces más que la C en llenar la alberca; si se abren las tres llaves se llena en una hora con 20 minutos". Dada esa situación, calcula:

a) ¿Cuánto tiempo tarda la única llave que sirve en llenar la alberca?

____

b) Si quieren tener la alberca lista a las 10 de la mañana, ¿a qué hora deberán abrir la llave?

____

c) ¿Cuánta agua requiere la alberca para llenarse?

____

d) ¿Cuántos litros de agua salen de esa llave cada minuto?

____

11. Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. Calcula cuáles son esos números.

____

12. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas, en centímetros, tres números pares. Determina los valores de dichos lados, sabiendo que el menor de ellos mide más de 10 cm y el perímetro del triángulo es de 72 cm.

____

Registro mis avances

Tema	Problema	Aciertos	En esta sección, marca tu nivel de aprendizaje alcanzado en cada tema. Considera las observaciones de tu profesor			
			Requiero de total apoyo	Necesito practicar	Casi lo domino	Óptimo
Patrones y ecuaciones	1, 2, 3, 10, 11,					
Figuras y cuerpos	7, 12					
Medida	4, 5, 6, 9,					
Nociones de probabilidad	8					
Mi total de respuestas correctas			Mi porcentaje de respuestas correctas			

En esta sección te proponemos que utilices lo nuevo que has aprendido, además de continuar aplicando las habilidades que ya tienes y has desarrollado, para analizar un problema real de nuestro país. Considera que la matemática es una ciencia práctica que utilizarás durante toda tu vida profesional.

Tal y como se comentó en el Bloque 1, puedes resolverlo de manera individual, pero seguramente será mucho más enriquecedor si lo llevas a cabo en equipo. Comparte los procedimientos de solución, las dificultades que tuviste para resolverlo y las dudas que surgieron o, quizá, todavía tengas, porque así el aprendizaje será más certero y ameno.

Siempre que lo necesites, apóyate de tu profesor. Él conoce diversos métodos para orientarte y, con su experiencia, te ayudará a aclarar tus dudas y concluir tus ideas.

Las diversas materias escolares te permitirán descubrir la labor más afín a tus habilidades e intereses.

Oficios y beneficios

En la medida en la que, desde su juventud, el ser humano perfila sus intereses, habilidades, talentos, aspiraciones y necesidades de preparación, entre otros aspectos, define la clase de adulto que puede ser el día de mañana. Analiza cuáles son algunas de tus habilidades e intereses vocacionales que has desarrollado hasta el momento y, aunque durante el bachillerato o preparatoria estos intereses y aptitudes pueden modificarse, considera que son importantes para que en un futuro, elijas una profesión. Pregúntate, ¿qué labores o materias escolares te agradan más?, ¿qué tipo de profesional quieres ser?, ¿qué trabajo deseas hacer?, ¿cuáles son tus habilidades?

En México, cada año aumenta la cifra de personas que terminan una carrera técnica y de licenciatura. Una de las razones por las que se estudia es la pretensión de contar con la debida preparación con la finalidad de conseguir un buen empleo que ofrezca estabilidad económica, o bien, capacitarse para emprender un negocio propio. Sin embargo, hay otras razones que debes considerar en tu elección, como tus gustos y las necesidades de tu comunidad, entre otras.

La escuela tiene el propósito de desarrollar las capacidades intelectuales, destrezas y valores por parte de los estudiantes. Uno de estos valores es el trabajo en equipo, con él se aprende a aprovechar los diversos talentos y a proponer diferentes maneras de resolver los problemas que se van presentando, los propios estudiantes hacen propuestas para mejorar la forma de vivir dentro y fuera de casa.

Al trabajar en equipo, escucha y sé respetuoso con las demás propuestas, considera que aprender a trabajar con los demás es fundamental en una sociedad.

1. Observa tu entorno, averigua qué labor desempeñan las personas que viven en tu comunidad y qué aportan con ello. Responde las siguientes preguntas, reúnete con tu equipo, compartan y comenten la información investigada y, entonces, organícenla para presentarle al grupo un resumen de cinco minutos.

- ¿Qué profesiones conoces?
- ¿Cuál es la que más llama tu atención?
- ¿Cómo ayuda en tu comunidad esta profesión?
- ¿Quiénes la llevan a cabo?
- ¿Qué conocimientos matemáticos se utilizan en dicha profesión?

2. A partir de la investigación anterior, observen y analicen los datos de la siguiente tabla.

Tasa de ocupación de la población adulta de 25 a 64 años de edad, según nivel de escolaridad y entidad federativa (2005 y 2011)

Entidad federativa	Nivel de escolaridad															
	Sin básica		Básica		Media superior		Superior		Sin básica		Básica		Media superior		Superior	
	2005								2011							
	L.I.	L.S.	L.I.	L.S.	L.I.	L.S.	L.I.		L.I.	L.S.	L.I.	L.S.	L.I.	L.S.	L.I.	L.S.
Aguascalientes	53.4	57.1	63.4	68.5	67.1	74.1	79.6	86.4	53.6	57.5	62.3	67.0	67.4	73.4	80.9	85.7
Baja California	57.8	61.6	68.4	72.9	68.6	74.4	78.2	84.6	60.1	64.1	64.4	69.0	68.7	73.7	76.5	81.9
Baja California Sur	58.0	65.3	65.4	72.8	72.8	78.7	83.0	89.1	65.2	71.1	67.9	75.4	72.1	78.0	75.3	84.2
Campeche	64.1	67.9	70.2	76.8	74.9	81.7	86.3	91.8	62.6	67.0	67.4	72.2	68.1	75.2	80.2	86.2
Coahuila	52.3	56.6	63.7	68.8	65.2	74.7	79.6	87.8	53.9	59.5	64.0	68.8	68.2	75.6	78.6	84.2
Colima	62.8	67.5	68.5	74.9	72.5	79.5	85.5	90.9	66.1	70.7	69.9	75.9	73.4	79.9	82.4	87.8
Chiapas	56.8	61.2	67.7	74.5	74.1	80.5	85.0	90.1	56.1	60.1	69.8	75.6	71.0	77.4	81.6	86.9
Chihuahua	56.1	62.4	64.3	71.1	70.1	80.0	81.0	89.2	55.6	61.5	58.8	67.4	59.8	70.9	69.6	81.6
Distrito Federal	59.9	64.8	66.2	71.0	66.4	71.9	78.4	83.1	58.8	65.0	68.5	73.5	67.1	72.4	77.3	82.0
Durango	53.6	58.4	62.1	68.7	68.3	76.9	80.4	86.8	52.7	59.3	60.9	68.5	62.8	72.6	83.2	90.3
Ciudad de México	55.8	59.9	66.4	70.9	66.3	72.3	79.3	85.1	57.5	61.8	66.2	70.8	64.4	70.0	74.1	81.2
Guanajuato	53.2	57.5	63.7	70.4	71.5	78.7	80.1	86.9	54.2	59.0	64.5	70.6	72.7	80.2	80.1	86.3
Guerrero	54.6	61.8	65.1	72.5	67.1	76.0	83.1	88.7	60.8	67.8	68.9	75.0	71.6	78.4	81.4	87.2
Hidalgo	57.3	63.6	64.4	71.8	68.3	76.5	79.0	88.0	55.6	61.9	59.0	67.0	68.3	75.5	78.6	85.8
Jalisco	58.1	62.4	67.0	72.1	68.5	75.3	83.8	88.6	58.6	63.2	68.7	73.9	69.1	76.3	80.9	85.8
Michoacán	55.2	61.4	63.8	72.4	72.7	83.6	81.2	89.2	58.9	65.3	62.2	72.8	65.1	75.2	80.8	89.5
Morelos	60.7	65.1	66.5	71.9	66.6	73.5	83.5	88.9	56.2	60.9	65.9	70.9	68.3	74.1	78.5	84.2
Nayarit	62.0	66.9	67.6	73.7	71.7	78.9	82.8	88.6	59.9	66.2	65.3	71.2	69.1	76.1	81.0	86.4
Nuevo León	56.8	61.1	67.1	70.6	64.1	70.3	79.5	84.3	55.9	60.9	67.2	70.4	67.5	73.9	75.0	80.5
Oaxaca	63.4	68.7	68.1	76.5	70.7	77.6	81.2	88.2	58.8	64.6	67.9	75.2	67.4	75.4	83.3	88.1
Puebla	60.2	64.3	68.4	73.4	67.1	74.9	78.5	83.7	59.4	64.8	68.2	73.7	67.4	74.8	76.7	82.5
Querétaro	54.2	58.4	71.2	75.9	72.5	78.7	81.4	86.9	49.9	54.8	65.6	70.5	68.9	75.6	80.8	85.3
Quintana Roo	64.5	69.1	75.2	80.0	79.0	85.6	89.6	94.7	62.8	67.0	73.3	77.9	78.8	84.8	83.7	90.8
San Luis Potosí	56.6	61.6	65.6	70.4	72.7	80.5	85.8	90.1	52.9	57.9	62.4	67.3	69.0	75.3	81.6	86.7
Sinaloa	61.7	66.8	68.4	75.4	74.7	82.3	84.2	90.2	54.1	60.3	64.0	70.5	68.4	75.9	77.8	84.6
Sonora	59.8	64.5	64.7	70.9	67.1	75.8	79.1	86.8	53.8	60.0	67.3	72.9	69.0	76.2	75.4	82.6
Tabasco	52.5	57.5	58.1	66.2	68.9	76.0	81.1	87.2	53.1	58.3	64.4	68.9	66.3	73.9	74.3	81.1
Tamaulipas	54.9	60.1	66.3	73.2	69.6	76.6	80.0	87.0	57.4	62.4	62.3	68.3	64.7	74.3	78.7	84.9
Tlaxcala	56.4	60.3	62.7	67.8	70.0	76.6	81.8	87.6	54.4	58.9	63.7	69.4	64.4	71.9	75.8	82.7
Veracruz	53.1	58.5	59.0	67.9	60.6	69.3	77.8	84.4	53.2	58.3	63.4	69.6	65.5	73.4	76.5	83.5
Yucatán	63.8	67.9	74.8	80.3	74.2	81.3	85.6	91.1	65.4	69.9	74.2	79.0	72.6	78.6	84.0	89.2
Zacatecas	52.5	57.9	58.1	65.6	72.9	80.3	84.5	89.6	52.5	58.8	56.1	63.4	70.7	78.3	81.7	87.6
Nacional	58.8	59.9	68.0	69.4	70.7	72.5	82.7	84.2	58.9	60.0	67.8	69.1	69.9	71.6	80.1	81.7

L.I. Límite inferior de confianza.

L.S. Límite superior de confianza.

Fuente: INEE, cálculos con base en la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo, 2° trimestre de 2005 y 2011, INEGI.

Glosario

Un intervalo de confianza es un rango de valores (calculado en una muestra) en el cual se encuentra el verdadero valor del parámetro, con una probabilidad determinada. La probabilidad de que el verdadero valor del parámetro se encuentre en el intervalo construido se denomina *nivel de confianza*. El paramentro menor será el **límite inferior de confianza** y el de mayor grado el **límite superior de confianza**.

3. A partir de la tabla, contesten en equipo las preguntas y desarrollen los trabajos que se indican:

   a) ¿Cuál es el tema al que se refiere la tabla?

   ____

   b) ¿En qué nivel de escolaridad hay mejores posibilidades de ocupación?

   ____

4. Elaboren, en su cuaderno, una tabla más corta, únicamente con los datos referentes a su entidad federativa.

   a) Para simplificar la tabla, promedien entre sí los límites inferior y superior de los datos de su entidad; hagan lo mismo con los datos del rubro nacional e intégrenlos en una nueva tabla.
   b) Hagan tres preguntas que orienten a visualizar exhaustivamente los datos de la tabla que desarrollaron en el equipo.
   c) Analicen los datos de la nueva tabla y propongan tres nuevas preguntas que permitan apreciar lo más significativo de esta.

Mis aptitudes y potencialidades

1. Preparen una encuesta que permita conocer las aptitudes y potencialidades de cada alumno de su clase. Comparen sus preguntas con las del resto del grupo y conformen una sola encuesta.
2. Como en cualquier encuesta que apliquen, cuiden el respeto que debe haber entre compañeros.
   Los resultados pueden ser tan plurales como el grupo mismo, de ahí que existan tan diversos tipos de ocupaciones.
   ¿Por qué piensas que sucede esto?

   ____

   ____

3. Analicen los resultados obtenidos en la encuesta.

En las encuestas de orientación vocacional, cuyo propósito es ayudarte a escoger tu profesión, encontrarás preguntas, directas e indirectas. A partir de las respuestas, se irá delimitando tu perfil, resumiendo las posibilidades en dos o tres opciones.

¿Qué es profesión, oficio o actividad productiva?

1. En forma grupal hagan un consenso para conocer las profesiones, oficios o actividades productivas de mayor interés.
2. Organizados en equipo, investiguen acerca de cada una de las opciones obtenidas en el punto anterior; distribuyan el trabajo que hará cada integrante.
3. Seleccionen aquellas profesiones que presentaron mayor frecuencia y elaboren una gráfica para poder apreciarlas en relación con las otras.
4. Hagan una encuesta que permita conocer más detalladamente qué actividades se llevan a cabo en cada profesión, oficio o actividad productiva. Aplíquenla, preferentemente a quien desarrolla actividades que llaman la atención de cada uno. Se puede preguntar acerca de los años de preparación necesarios para llevar a cabo dicha actividad y horas que se labora, entre otros aspectos.

5. Separen los datos cualitativos de los cuantitativos y organícenlos en una tabla.
6. Presenten un periódico o carta mural con la información obtenida en sus investigaciones para que otros estudiantes de la escuela puedan conocerla.

Recuerda que, por medio de gráficas se puede presentar la información de manera más concisa y clara, úsalas en tu mural.

Me gustaría prepararme para...

Es probable que tu visión de lo que te interesaba, respecto a tu profesión, haya cambiado; sea así o no, visualízate en un futuro cercano y elabora un proyecto a corto plazo que te permita apreciar lo que necesitas cuidar para alcanzar tus metas. ¿Qué promedio de aprovechamiento requieres para ingresar en la escuela de tu preferencia? ¿A qué distancia se encuentra la escuela a la que quieres asistir? Considera tus aptitudes, potencialidades, intereses e inquietudes, así como la información obtenida hasta ahora.

7. A partir de las investigaciones presentadas entre todo el grupo, elaboren con apoyo de su profesor una propuesta de mejora o solución de los problemas presentados.
8. Si es posible, organícense como generación de alumnos de tercer grado y hagan una carta mural con la información correspondiente.

BLOQUE 3

Ejes	Temas	Contenido	Sesiones
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	3.1. Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	5
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	3.2. Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	4
		3.3. Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	4
		3.4. Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	5
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	3.5. Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	4
		3.6. Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	5
	Nociones de probabilidad	3.7. Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	5

Para lograr los aprendizajes esperados planteados en este bloque, se sugiere la dosificación de contenidos en sesiones como se muestra en la tabla, además, se recomienda destinar dos sesiones para la aplicación y revisión de exámenes y cinco sesiones para el desarrollo y la presentación de la sección "Aplicaciones matemáticas" de fin de bloque.

APRENDIZAJES ESPERADOS

En este bloque, el estudiante aprenderá a:

- Resolver problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

El estudio de las matemáticas en la educación básica favorece las siguientes competencias:

- **Resolver problemas de manera autónoma**
- **Comunicar información matemática**
- **Validar procedimientos y resultados**
- **Manejar técnicas eficientemente**

EJE **SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO**

TEMA Patrones y ecuaciones

Contenido

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

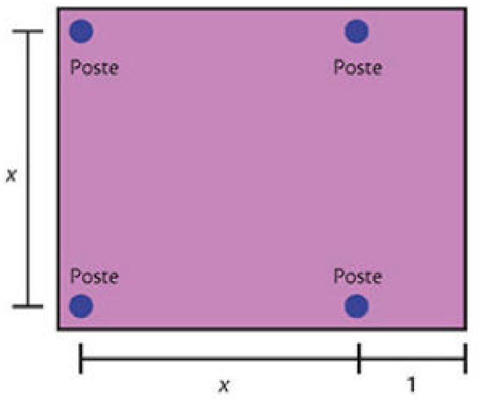
3.1 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas

LO QUE SÉ

Organizados en equipos, respondan las siguientes actividades.

1. Rogelio construirá un pequeño cobertizo en el patio de su casa. Para hacerlo colocará postes de madera en las cuatro esquinas del terreno y, sobre ellos, una lámina que sirva como techo. Rogelio desea que la lámina sobresalga una distancia de 1 m en uno de los lados. Si su presupuesto le permite comprar 10 m^2 de lámina, ¿qué distancia deberá separar a los postes?

Observen la figura del cobertizo, visto desde el techo, y respondan. Tengan en cuenta que se ha utilizado la variable x para referirnos a la distancia entre los postes (que es la incógnita en este problema).



a) ¿Qué expresión matemática modela la superficie de lámina que queda sobre los postes? ____________

b) ¿Qué expresión matemática modela la superficie de lámina que queda más allá de los postes? ____________

c) ¿Cuál es la expresión matemática de la superficie total y a qué debe ser igual (considerando el presupuesto)? ____________

Comparen sus resultados con otro equipo y comenten sus procedimientos. Consulten con su profesor las dudas que tengan.

Razono

Resuelve las ecuaciones, mediante cálculo mental.

a) $x^2 - 32 = 49$

b) $x^2 - 27 = 9$

c) $x^2 - 4x = 0$

d) $25x^2 = 100$

e) $\frac{(x^2 - 1)}{6} = 8$

¿Qué estrategias utilizaste? Coméntalas y compáralas con las de tus compañeros.

2. Simplifiquen y ordenen los términos de las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 + 6x = x^2 - 9$

b) $4x^2 + 5x = 2x^2 - 7x - 16$

c) $x^2 - 4x + 10 = 8x - x^2$

d) $5 + 3x - x^2 = x - 2x^2$

e) $x(x + 6) = 2(3 + x) - x^2 + 2x + 25$

f) Observen todas las ecuaciones simplificadas, ¿qué tienen en común? Comenten lo que observen y establezcan una conclusión grupal.

Recuerda que...

Una ecuación de segundo grado o cuadrática puede identificarse si al simplificar y ordenar sus términos adquiere la forma:

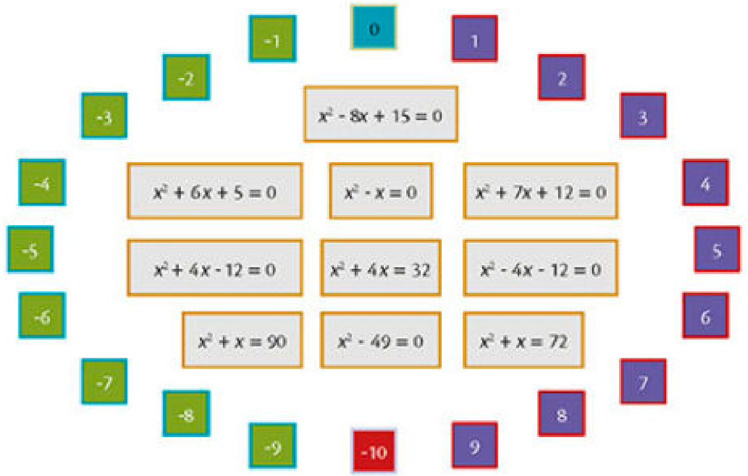
$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde la variable a corresponde al coeficiente del término de segundo grado; b, al coeficiente del término lineal; y c, al término independiente.

3. En el bloque anterior resolvimos, mediante factorización, ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Completen el siguiente ejemplo.

Dada la ecuación	$x^2 + 16x + 64 = 0$
Factorizando:	$(x + 8)(\quad) = 0$
Analizando factores:	Si $x + 8 = 0$
Resolviendo:	$x =$
Comprobando:	Si $x = -8$
Sustituyendo:	$(\quad)^2 + 16(\quad) + 64 = 0$
Desarrollando:	$+ 64 = 0$
Efectuando operaciones:	$0 = 0$

4. Unan con una línea los valores de cada incógnita con su ecuación correspondiente, procuren que las líneas de unión no se crucen entre ellas. Comparen su resultado con el del equipo más cercano.



a) ¿Cuántas soluciones tiene cada ecuación? Comenten cómo llegaron a esa respuesta y valídenla con su profesor.

CONSTRUYO

Reunidos en parejas, resuelvan las actividades y analicen los resultados en grupo. Guiados por su profesor, intercambien ideas sobre sus procedimientos y resultados.

Actividad 1. Completen la tabla siguiente utilizando las ecuaciones de la actividad anterior.

Ecuación	*a* (coeficiente cuadrático)	*b* (coeficiente lineal)	*c* (coeficiente independiente)
$x^2 + 6x + 9 = 0$			
$2x^2 + 12x + 16 = 0$			
$2x^2 - 12x + 10 = 0$			
$2x^2 + 2x + 5 = 0$			
$2x^2 + 2x - 31 = 0$			

PARA TENERLO PRESENTE

Analicemos la resolución de la siguiente ecuación y su generalización:

	Ecuación particular:	**Generalizando:**
	$4x^2 + 12x + 8 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
Simplificando:	$x^2 + 3x + 2 = 0$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Despejando:	$x^2 + 3x = -2$	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Completando términos para formar un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Factorizando:	$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
Efectuando operaciones:	$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
Extrayendo raíz cuadrada:	$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2}$	$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Despejando:	$x = \pm\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$	$x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$
Reduciendo términos:	$x = \frac{-3 \pm 1}{2}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
	$x_1 = -1$	
	$x_2 = -2$	Fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado

Investigo

¿Cómo se pueden resolver polinomios de grados mayores que 2?

Actividad 2. En equipo, resuelvan mediante la fórmula general las ecuaciones siguientes. En su cuaderno, elaboren una tabla y anoten los valores de los términos *a*, *b* y *c*.

a) $x^2 + 15x + 56 = 0$

d) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 - x - 56 = 0$

e) $3x^2 + 14x - 5 = 0$

c) $2x^2 + 6x - 40 = 0$

f) $x^2 + 10x - 11 = 0$

PARA TENERLO PRESENTE

La *fórmula general* se utiliza para resolver polinomios de segundo grado. Siempre que la utilices debes tener presente que se obtienen dos soluciones.

Actividad 3. En parejas, resuelvan los siguientes problemas y compartan sus respuestas con el grupo.

1. Para la Semana de la ciencia y la tecnología, Miguel y Mariana construyen un modelo a escala de una catapulta romana capaz de lanzar piedras pequeñas. Para probarla hacen un lanzamiento. Su profesor de física, haciendo uso de las fórmulas para tiro parabólico les explica que la altura de la roca estará dada por:

$$\text{Altura} = 2.3\,(\text{tiempo}) - 4.9\,(\text{tiempo})^2$$

a) ¿Cuánto tiempo pasará para que la roca se encuentre a una altura de 1.2 metros? ______

b) Planteen una ecuación de segundo grado que permita resolver esta situación. ______

c) ¿Es posible efectuar una factorización en la ecuación planteada en el inciso anterior? Expliquen. ______

d) ¿Con cuál método podrías resolver la ecuación? Inténtalo enseguida.

e) El símbolo (±) que aparece en la fórmula general significa que en una solución hay que considerar el signo *más* (+) y en la otra el signo *menos* (−). Tomando en cuenta esto, ¿cuáles son las soluciones al problema? ______

f) ¿Tienen sentido las dos soluciones para dicha ecuación? Expliquen su respuesta al grupo y la manera en la que resolvieron el problema. Concluyan entre todos.

2. Una pared de forma rectangular mide 5 m más de altura que de base.

a) Si ocupa un área de 24 m², ¿cuáles son sus medidas?

b) ¿Cuál es la expresión que representa el área del rectángulo? ______

c) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación? ______

d) ¿Cuánto mide la base de la pared? ______

e) ¿Cuánto mide la altura de la pared? ______

f) Comenten sus respuestas con el resto del grupo y su profesor. Validen sus respuestas y procedimientos con la ayuda del docente.

Actividad 4. Resuelve los siguientes problemas en el recuadro. Al terminar, comenta con tus compañeros el procedimiento que llevaste a cabo. Revisen similitudes y diferencias y corrijan si fuera necesario.

Usa las TIC

Para practicar la resolución de ecuaciones de segundo grado, entra a la siguiente página electrónica: http://goo.gl/ysy1uV (consultado el 2 de diciembre de 2016).

1. La altura de un rectángulo mide 2 cm menos que su base. Su área mide 35 cm^2, ¿cuánto mide el rectángulo?

2. Calculen las medidas de un rectángulo que ocupa un área de 644 cm^2 cuyo ancho mide 5 cm menos que su largo.

PARA TERMINAR

Resuelve las siguientes actividades de manera individual y, al terminar, comparte tus procedimientos y soluciones con un compañero. Validen sus respuestas con ayuda de su profesor.

1. Comprueba la validez de la fórmula general: sustituye en ella los valores de *a*, *b* y *c* de la ecuación $4x^2 + 12x + 8 = 0$ y verifica que los resultados coincidan.

   Plantea un problema en el que utilices la ecuación y los valores encontrados. Intercámbialo con un compañero y coevalúense.

2. Manuel visitó el Instituto de Biología de la Universidad por un evento de puertas abiertas. Ahí escuchó la plática de un científico que afirmaba que después de mucho estudiar cierta especie de bacterias, había descubierto que podía modelar el número de individuos en la población con la siguiente expresión matemática:

$$\text{Población} = 100 + 60(\text{tiempo}) - (\text{tiempo})^2$$

Si el investigador requiere observar la población cuando haya aproximadamente 500 individuos, ¿en qué momento debe hacer sus mediciones?

3. En un patio de forma cuadrada se redujeron 2 m sus medidas por lado para sembrar plantas, su nueva área es de 8 m^2. Calcula su área anterior.

4. El largo de una manta de forma rectangular excede 4 cm su ancho. Si a cada lado se le agregan 4 cm, su área se duplicaría. Calcula las medidas de la manta con la añadidura.

5. La longitud de mi habitación excede un metro a su ancho. Si se amplía 2 m más por lado ocupará un área de 24.75 m^2, ¿cuáles serían las nuevas medidas de mi habitación?

Contenido

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

3.2. Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza

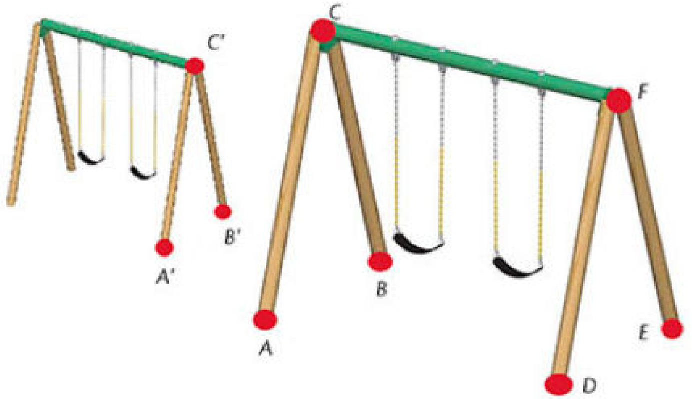
LO QUE SÉ

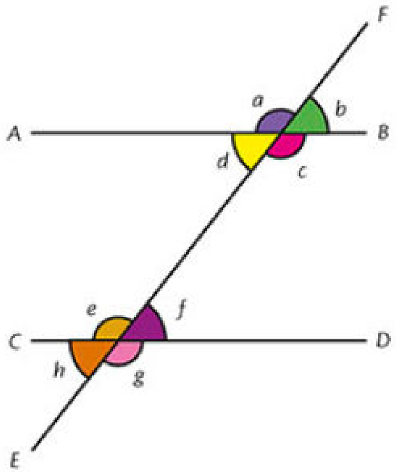
Resuelve los siguientes problemas de manera individual. Al terminar, compártelos con el compañero de al lado.

Recuerda que...

La *semejanza* entre figuras se refiere a tener la misma forma, mientras que la *congruencia*, además, requiere que se mantengan sus medidas.

1. Jorge llevó a su hermano pequeño Alejandro a un parque que se encuentra a unas cuadras de su casa. En el parque hay dos estructuras con columpios; una de ellas es más pequeña y tiene un letrero que dice "Exclusivo para niños menores de 4 años".



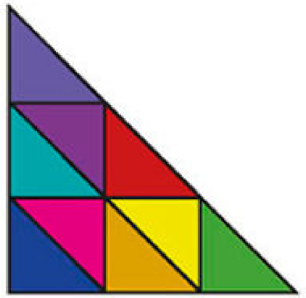


a) ¿Cómo son entre sí los triángulos *ABC* y *DEF*? ¿Qué criterio usaste para responder? ________________
b) ¿Cómo son entre sí los triángulos *ABC* y *A'B'C'*? ¿Qué criterio usaste para saber esto? ________________
c) ¿Cómo son entre sí los triángulos *CBF* y *EBF*? ¿Qué criterio usaste para responder? ________________
e) Validen sus respuestas con ayuda de su profesor.

2. En la figura de la izquierda, las rectas *AB* y *CD* son paralelas, y la recta *EF* las corta oblicuamente.
   a) De los ocho ángulos que se forman, algunos tienen las mismas medidas. ¿Puedes relacionarlos? Explica.

Al finalizar, compara tus respuestas con las de tus compañeros.

3. Observa la figura y contesta:
   a) ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos semejantes que contiene? ________________
   b) ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos congruentes que contiene? ________________



Compara tus respuestas con las del compañero más cercano y argumenten qué diferencia hay entre los triángulos semejantes y los congruentes.

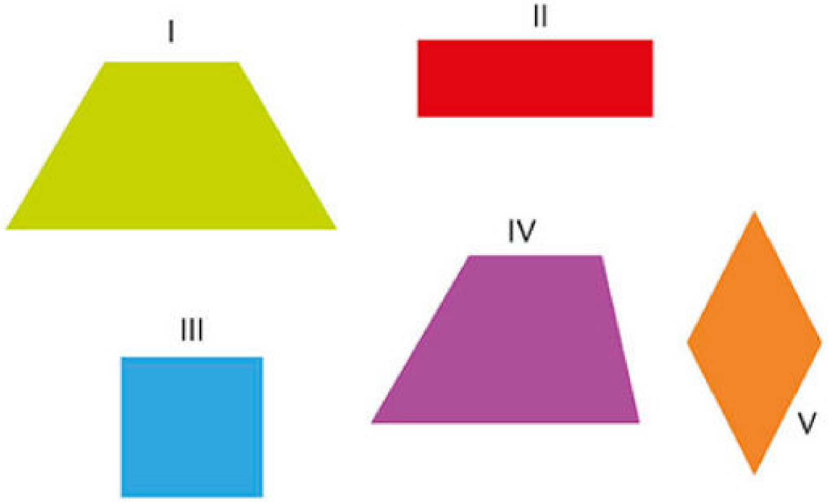
CONSTRUYO

Resuelve las siguientes actividades. Al terminar, comenta con tu grupo y profesor lo más relevante.

Actividad 1. Tracen las diagonales de los siguientes cuadriláteros.

Recuerda que...

Una *diagonal* es una línea recta entre dos vértices no consecutivos. Un cuadrilátero tiene dos diagonales.



a) ¿En cuáles de los cuadriláteros las diagonales forman triángulos congruentes? ________________
b) ¿Con cuál criterio de congruencia se puede probar que los triángulos que se forman al intersecarse las diagonales son congruentes? ________________
c) Comenten con su profesor sus argumentos. Si existieran diferencias en sus respuestas, coméntenlas y lleguen a una respuesta entre todos.

Actividad 2. En equipo, analicen las siguientes afirmaciones. Ejemplifiquen cada caso y determinen si al efectuar los trazos que se indican se forman figuras semejantes. Al terminar cada caso compartan sus procedimientos y respuestas con los demás equipos. Apóyense en su profesor para llegar a una respuesta común.

a) Trazar dos triángulos cualesquiera.

b) Trazar dos triángulos rectángulos en los que el cateto de uno de los triángulos mida el doble que uno de los catetos del otro triángulo.

c) Trazar dos triángulos isósceles en los que el ángulo diferente mida 30°.

d) Trazar dos triángulos rectángulos en los que un ángulo agudo de uno sea congruente con el ángulo homólogo del otro.

Usa las TIC

Si tienes oportunidad de trabajar en la computadora, visita la página http://goo.gl/GV0OQJ y lleva a cabo las actividades planteadas. (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Actividad 3. Resuelve el problema. Al finalizar compara tu resultado con el del compañero más cercano y comenten acerca de sus procedimientos.

Se sabe que tres triángulos tienen el mismo perímetro. Los lados del primero miden $4x + 2$, $3x + 3$ y $5x + 1$; los del segundo miden $2x + 7$, $7x - 10$ y $5x + 1$; y los del tercero miden $4x - 2$, $7x - 8$ y $3x + 8$.

a) Calcula el perímetro para cada triángulo y anótalo en el espacio.

- Triángulo 1: ___________
- Triángulo 2: ___________
- Triángulo 3: ___________

b) Utiliza esta información para obtener el valor de x y anótalo en la línea. _______

c) Ya que conoces el valor de x, determina cuánto miden los lados de cada triángulo.

- Triángulo 1: ___________
- Triángulo 2: ___________
- Triángulo 3: ___________

d) Determina cuántos y cuáles triángulos son congruentes. Anota tu respuesta y razonamiento sobre las líneas.______________________________
Revisen las respuestas entre todo el grupo y comenten sus procedimientos.
____

Actividad 4. Traza las figuras que consideres necesarias para ejemplificar tus respuestas.

a) ¿Todos los triángulos de igual perímetro son congruentes? Argumenta.________
____

b) ¿Todos los cuadriláteros de igual área son congruentes? Argumenta. _________
____

c) Compara tu respuesta con la de otro compañero y comenten sus razonamientos. ¿Encontraron diferencias? ¿A qué se deben? Analicen las razones y juntos presenten una respuesta al grupo.

Investigo

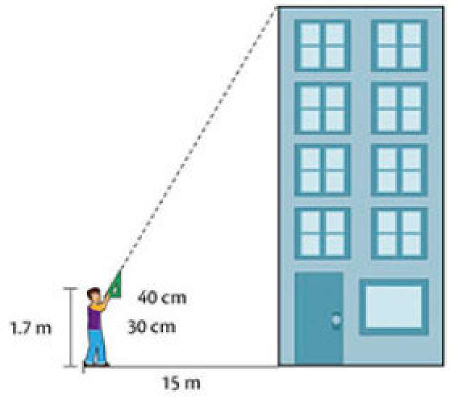
Los exploradores utilizan un mapa y una brújula para orientarse en el bosque y otros terrenos. Utilizando un procedimiento llamado triangulación, son capaces de ubicarse. Investiga cuál es este procedimiento, y cómo se relaciona con la semejanza.

Actividad 5. Daniel utilizó una escuadra para observar la parte alta del edificio donde vive.

a) Observen la figura y con los datos mostrados calculen la altura del edificio.

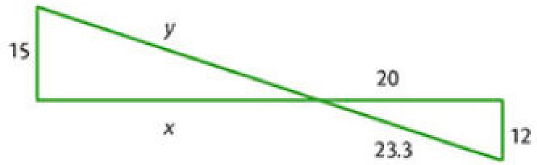
____

Con otro equipo, comparen el resultado obtenido y comenten sus procedimientos.

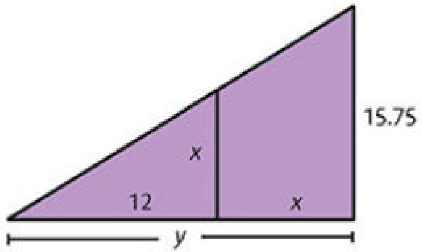


Actividad 6. Resuelve los siguientes problemas de manera individual.

1. Calcula los valores de x y y de la siguiente figura. Compara tus resultados con los de un compañero y comenten sus procedimientos. Si hay diferencias, determinen las razones y lleguen a una respuesta en común.



2. Calcula los valores de x y y de las siguientes figuras. Comparte tus procedimientos con tu grupo. Corrige si fuera necesario.



PARA TENERLO PRESENTE

Existen dos relaciones importantes entre figuras: la semejanza y la congruencia.

La *congruencia* se refiere a que dos figuras tengan los mismos puntos, es decir, que tengan la misma forma y las mismas medidas. En la *semejanza*, solo importa la forma y las medidas pueden cambiar.

Los tres criterios de congruencia en triángulos son:

- *LLL, cuando los tres lados de cada uno tengan las mismas medidas.*
- *LAL*, cuando dos lados y el ángulo que forman tienen la misma medida.
- *ALA*, cuando dos ángulos y su lado en común tienen la misma medida.

Para establecer la semejanza entre figuras, se aplican los siguientes criterios:

- Los lados homólogos son proporcionales.
- Uno de sus ángulos mide lo mismo y los lados que lo forman son proporcionales.
- Tienen, uno a uno, dos ángulos que miden lo mismo.

Actividad 7. En parejas, tracen lo que se indica en cada caso, aplicando los criterios de semejanza o congruencia según se requiera y argumenten si esta situación ocurre siempre, o no.

1. Al trazar dos triángulos isósceles resultan semejantes si el ángulo desigual mide 90°.

2. Al trazar dos triángulos rectángulos cualesquiera siempre resultan semejantes.

3. Un árbol proyecta una sombra de 20 m, en tanto que un arbusto de 1.5 m junto a él proyecta una sombra de 1 m. Calcula la altura del árbol.

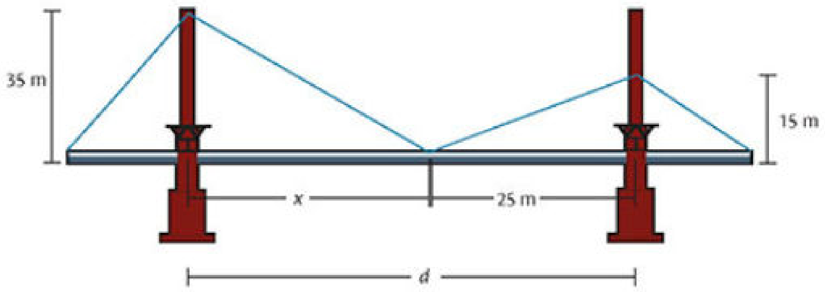
Guiados por el profesor, revisen las respuestas de los problemas y comenten los procedimientos que aplicaron. Corrijan lo que sea necesario y aclaren las dudas que tengan.

PARA TERMINAR

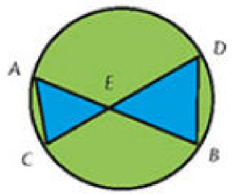
Resuelve los siguientes planteamientos de manera individual.

1. Se quiere hacer el plano de un terreno de forma triangular cuyos lados miden 140, 120 y 100 m, respectivamente. Al trazarlo en papel, el mayor de los lados resulta de 20 cm. ¿Cuánto deberán medir los otros dos lados?

2. De acuerdo con la figura, dos cables sujetan un puente. Calcula la distancia que hay entre los postes.



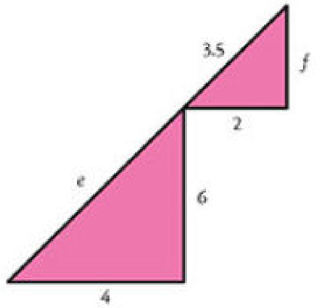
3. De acuerdo con la figura, las cuerdas AB y CD se cortan en el punto E. ¿Cómo se demuestra que los triángulos ACE y BDE son semejantes? Descríbelo.



4. Calcula la medida de los segmentos representados mediante una letra.

a) El segmento e mide

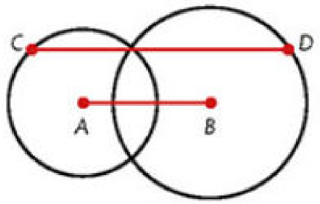
b) El segmento f mide



c) Escribe el procedimiento que utilizaste para encontrar la respuesta. Al finalizar, compara tu procedimiento de solución con el de un compañero.

5. Observa la figura. La distancia AB que hay entre los centros de dos circunferencias que se intersecan mide 5 cm. Por uno de los puntos de intersección se traza un segmento paralelo a AB.

a) Calcula la medida del segmento CD que se forma con la intersección de las circunferencias.



b) Revisa tus respuestas de esta sección junto con tu profesor. Argumenta cada una y comenta los procedimientos que aplicaste. Si fuera necesario, corrige tus respuestas y plantea las dudas que aún tengas.

Investigo

Investiga por qué se deben usar los criterios de congruencia en triángulos que no sean rectángulos. ¿Por qué no podemos utilizar el teorema de Pitágoras en un triángulo equilátero? Responde esta pregunta junto con tu grupo.

Contenido

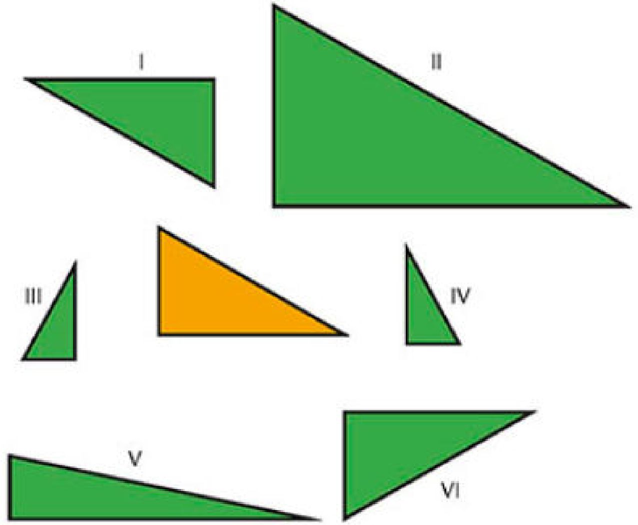
Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

3.3. Resolución de problemas mediante el teorema de Tales

LO QUE SÉ

Resuelve los siguientes problemas.

1. Observa la siguiente figura. En el centro hay un triángulo y alrededor hay otros señalados con números romanos.
   a) Determina si dichos triángulos son congruentes, semejantes, o ninguna de las opciones anteriores. Justifica tu elección.
   b) Con un pedazo de hoja cuadriculada, mide cuántas unidades tiene cada uno de sus lados y calcula la razón de semejanza.
   c) Comenta con tus compañeros y profesor tus razonamientos y valida junto con ellos tus respuestas.



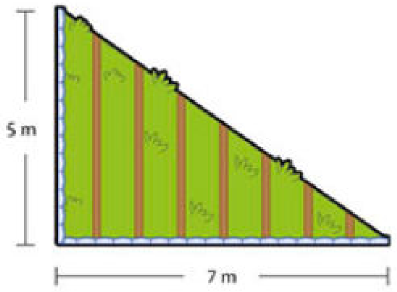
Razono

¿Cómo son entre sí los segmentos que forman las transversales cuando se cortan por dos o más rectas paralelas? Argumenta tu respuesta.

2. Dibuja en tu cuaderno un segmento *AB* y divídelo a la mitad. Para ello, sigue el siguiente procedimiento.
   - Abre tu compás con una medida mayor a la mitad del segmento.
   - Apoya tu compás en el punto *A* y traza una circunferencia. Luego, traza una circunferencia apoyado en el punto *B*.
   - Las circunferencias que trazaste se intersecan en dos puntos que llamaremos *C* y *D*. Traza el segmento *CD*.
   - El punto en que *CD* interseca a *AB* es el punto medio de *AB*. Compruébalo midiendo el segmento con tu compás.

   a) Propón un procedimiento para dividir un segmento en tres y pruébalo.
   b) Discútelo con tus compañeros y lleven a cabo aquel que les parezca más adecuado.

3. Un terreno de forma triangular, como el que se observa en la figura, se dividió con tiras de madera paralelas a uno de los lados del terreno para repartirlo entre varios ejidatarios. Entre una tira de madera y otra se mantuvo la misma distancia.

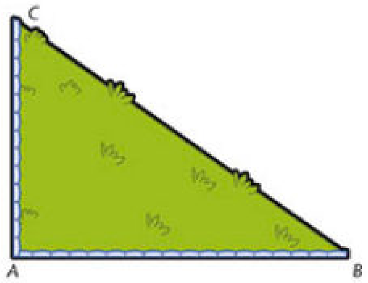


   a) Calcula la longitud total de tiras de madera que se utilizaron: ________ ____________
   b) Comenten el procedimiento que utilizaron y las dificultades a las que se enfrentaron. Validen sus respuestas con ayuda de su profesor.

CONSTRUYO

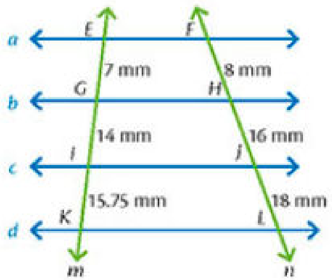
Desarrolla junto con el grupo las siguientes actividades. Al terminar, coméntalas con tu profesor.

Actividad 1. Imaginen que se desea reducir el tamaño del terreno triangular del problema anterior.



a) Tracen un segmento paralelo al segmento *AB*, que quede dentro del terreno triángular *ABC*. Observen que se formará un nuevo triángulo con ese segmento y porciones de los segmentos *AC* y *BC*. ¿Qué puedes decir respecto al triángulo que se formó? Coméntalo con tu compañero de al lado.
b) Repitan el procedimiento para los segmentos *AC* y *BC*.
c) Comenten con otros compañeros su procedimiento. Luego, en grupo, analicen las respuestas y lleguen a una respuesta común.

Actividad 2. En la siguiente página, observen que en la figura las rectas *m* y *n* son transversales y cortan a las rectas paralelas *a*, *b*, *c* y *d*. Teniendo como referencia dichas rectas y las medidas que se muestran, calcula las razones que se indican y contesten las preguntas.



- $\frac{FH}{HJ}$ = ____________
- $\frac{IK}{EG}$ = ____________
- $\frac{EG}{GI}$ = ____________
- $\frac{JL}{FH}$ = ____________

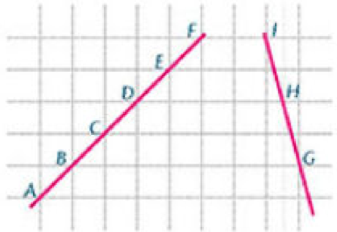
a) ¿Resultan proporcionales los segmentos que se forman entre las paralelas que cortan a cada una de las rectas *m* y *n*? ______________________

¿Por qué? ______________________

b) Para confirmar su respuesta, tracen una recta transversal que corte a las paralelas *a*, *b*, *c* y *d*. Midan si los segmentos que se forman entre las paralelas mantienen la misma proporción que los de las rectas *m* y *n*.

c) Entre todo el grupo concluyan, ¿cómo son entre sí los segmentos que se forman entre las paralelas? ______________________

Actividad 3. Observa la figura, mide lo necesario, determina las razones que se indican y contesta las preguntas.



Razones

- $\frac{BC}{DE}$ = ____________
- $\frac{EF}{DF}$ = ____________
- $\frac{GH}{HI}$ = ____________
- $\frac{GI}{HI}$ = ____________

Aprovechemos las líneas auxiliares: la horizontal que pasa por *A* y la vertical que pasa por *C* para ubicar con su intersección al punto *J* y formar el triángulo rectángulo *AJC*. De la misma forma, coloca el punto *K* con las líneas que pasan por *A* y *E* para formar el triángulo rectángulo *AKE*.

a) ¿Resultan semejantes los triángulos? ¿Por qué? ______________________

____

b) ¿Resultan proporcionales sus lados? ¿Por qué? ______________________

____

c) ¿Pueden formarse otros dos triángulos semejantes? ¿Cuáles? ______________________

____

d) ¿Todos los triángulos que se forman con la transversal *AF* y las líneas auxiliares del plano son semejantes? Explica. ______________________

Escribe otros ejemplos: ______________________

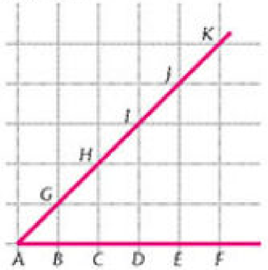
Compara tus respuestas con el grupo y comenten sus razonamientos.

Recuerda que...

Con el procedimiento de segmentos proporcionales es posible trazar la cuarta proporcional.

Actividad 4. Observa la figura y contesta.

a) Si la distancia entre cada línea vertical consecutiva es la misma y se sabe que *FK* mide 5 unidades, calculen la razón.



$\frac{AJ}{AG}$ = ____________

b) ¿Cuánto mide *CH*? ______________________

- ¿Cuál fue tu procedimiento para encontrar la respuesta? ______________________

____

c) Si *GI* mide 2.8 unidades, ¿cuánto mide *HK*? ______________________

- ¿Cuál fue tu procedimiento para encontrar la respuesta? ______________________

____

d) Si *AD* mide 3 unidades, ¿cuánto mide *BF*? ______________________

- ¿Cuál fue tu procedimiento para encontrar la respuesta?

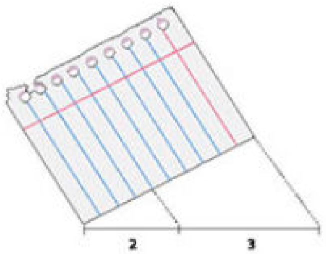
____

e) Al terminar la actividad, comparte tus respuestas y procedimientos con el grupo. Comenten cuál es el más adecuado y concluyan entre todos.

Razono

¿Este procedimiento sirve para dividir un segmento en cualquier número de partes? Argumenta tu respuesta.

Actividad 5. Al grupo se le pidió dividir un segmento en dos partes con una razón $\frac{2}{3}$; como Carlos no tenía regla graduada utilizó una hoja del cuaderno de rayas. La figura muestra su procedimiento.



a) ¿Las partes del segmento mantienen la razón establecida? Argumenta tu respuesta.

____

b) Comenta tus argumentos y establezcan una conclusión grupal. ____________

Aplicación

El teorema de Tales se llama así por Tales de Mileto (624-546 a. n. e.), considerado como el primer gran impulsor de la investigación científica en Grecia. Este teorema se puede aplicar en la construcción de triángulos semejantes y así construir ángulos rectos sin necesidad de medirlos.

Actividad 6. Divide los siguientes segmentos en las razones r que se indican. Compara tus resultados con los del compañero más cercano. En caso de diferencias, comenten sus procedimientos.

a) $r = \frac{1}{2}$

d) $r = \frac{3}{1}$

b) $r = \frac{1}{3}$

e) $r = \frac{2}{3}$

c) $r = \frac{2}{1}$

f) $r = \frac{3}{2}$

Actividad 7. Traza en tu cuaderno un segmento AB, divídelo usando la razón $\frac{1}{3}$. En seguida, traza un segmento AC y divídelo usando la razón $\frac{2}{6}$. Luego, traza el segmento BC, y otro entre los puntos que dividen a los segmentos AB y AC con las razones dadas.

a) ¿Cómo son los últimos dos segmentos que trazaste? ______________

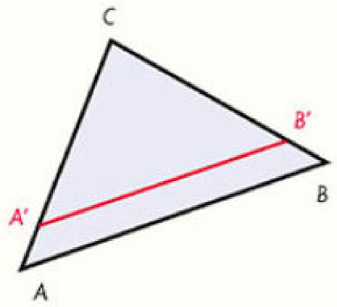
b) Comparte tus trazos con el compañero de al lado y comenten su respuesta a la pregunta del inciso a). Lleguen a una sola respuesta y valídenla con su profesor.

¿Sabías que...

Tales de Mileto vivió entre los siglos VII y VI a. n. e. Se dice que midió la pirámide de Keops utilizando solo un bastón y las proporciones de las sombras proyectadas?

PARA TENERLO PRESENTE

El *teorema de Tales* afirma que si se traza una línea paralela a uno de los lados de un triángulo, el nuevo triángulo que se forma es semejante al original. Por ejemplo:



El segmento $A'B'$ es paralelo al segmento AB. Por esto, el teorema de Tales afirma que el triángulo $A'B'C$ es semejante al triángulo ABC.

Este teorema puede usarse, entre otras cosas, para dividir un segmento en proporciones arbitrarias.

Usa las TIC

Si tienes oportunidad de trabajar en computadora, resuelve los ejercicios propuestos en la página electrónica http://goo.gl/3WtXGi (consultado el 2 de diciembre de 2016).

PARA TERMINAR

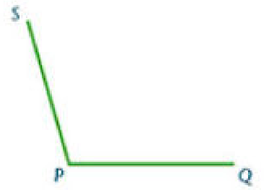
En parejas, planteen el diagrama que les permita resolver los siguientes problemas y encontrar la solución.

1. Se desea trazar el plano de un terreno que tiene forma triangular, sus lados miden 40, 80 y 70 m, respectivamente. Si el mayor de los lados se traza en el plano y mide 16 cm, ¿qué longitud deberán tener los otros dos lados? ¿Qué razón se está utilizando?
2. En cierto momento, dos aviones que vuelan con la misma trayectoria coinciden en línea vertical, uno a 3 000 m y el otro a 2 000 m sobre el nivel del mar. En ese momento, los pilotos observan una isla cercana. El que está volando más alto observa la costa más lejana, mientras que el que vuela abajo observa la costa más cercana. La isla tiene una longitud de 400 m entre costa y costa, ¿qué distancia les falta para empezar a volar sobre la isla?

Investigo

Tales de Mileto fundó una escuela filosófica de la que Anaxímenes fue alumno. Investiga las ideas principales de esta escuela y por qué se llamó así. Asimismo, busca otras aplicaciones directas de su teorema en la geometría.

3. Dividan cada uno de los segmentos PQ y PS en dos partes tales que mantengan la razón $\frac{3}{5}$.



4. Lean los siguientes enunciados y argumenten o ejemplifiquen lo que se indica en cada caso.

   a) La suma de los tres ángulos de un triángulo equivale a dos ángulos rectos.

   ____

   ____

   b) Los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo.

   ____

   ____

   c) Cualquier diámetro divide al círculo en exactamente dos partes iguales.

   ____

   ____

   d) Todos los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.

   ____

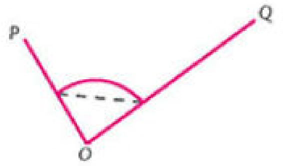
   ____

5. Dado un ángulo y el segmento que une los extremos del arco que forma, si se divide en tres partes iguales dicho segmento y por el extremo de cada una, se traza una línea que pasa por O, ¿el ángulo que forma cada parte mide lo mismo?

   ____

   ____

   - Compruébalo.



Revisen de manera grupal las respuestas de los problemas de esta sección; en caso necesario, corrijan sus resultados. Intercambien comentarios acerca de sus procedimientos y validen sus respuestas con apoyo de su profesor.

Contenido

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

3.4. Homotecia

LO QUE SÉ

Reúnete en pareja para resolver las siguientes actividades.

1. Determinen de qué segmento forman parte los siguientes, dada la razón que se indica.

   a) El segmento AB es $\frac{1}{2}$ de AC. Completen el segmento AC.

   b) El segmento PQ es $\frac{2}{3}$ de PS. Completen el segmento PS.

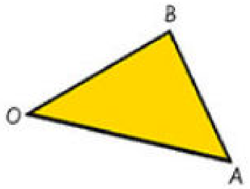
   c) El segmento FG es $\frac{1}{4}$ de FH. Completen el segmento FH.

   d) El segmento JL es $\frac{3}{2}$ de JK. Determinen el segmento JK.

   e) El segmento EG es $\frac{10}{8}$ de EF. Determinen el segmento EF.

Al finalizar, comparen sus resultados con los de otra pareja y analicen procedimientos de solución. Validen sus respuestas con su profesor.

2. Observen la figura, sigan las instrucciones para trazarla en sus cuadernos según se indica y respondan las preguntas.



   a) Prolonguen el segmento OA hasta el triple de su tamaño y coloquen al final el punto A'. Repitan para el segmento OB, y coloquen el punto B'.

   b) ¿Cómo es el triángulo $OA'B'$ respecto al OAB? ______________________________

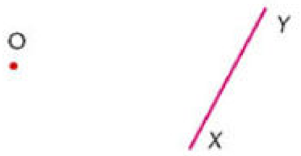
   c) ¿Cuánto vale la razón $A'B'/AB$? ______________________________

   ____

CONSTRUYO

Organícense como se indica para resolver las siguientes actividades.

Actividad 1. Reúnanse en parejas. Usando la siguiente figura, sigan las instrucciones para trazar la figura en sus cuadernos según se indica y respondan las preguntas.



a) Prolonguen el segmento OX hasta el doble de su tamaño y coloquen al final el punto X'. Repitan para el segmento OY y coloquen el punto Y'.

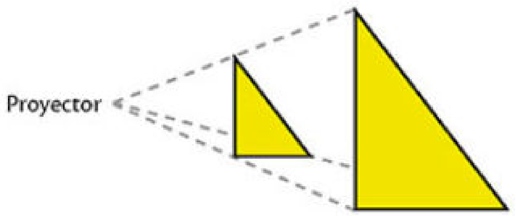
b) ¿Cuánto vale la razón $X'Y'/XY$? ____________________

c) ¿Cómo se relaciona esto con el punto 2 de la sección anterior? Coméntenlo en grupo.

PARA TENERLO PRESENTE

Lo anterior corresponde a una *homotecia*. Esta es simplemente una transformación que mantiene la forma, pero cambia el tamaño en la razón indicada.

Actividad 2. ¿Has observado cómo se proyectan las imágenes en un cine? El proyector ilumina una imagen y esta se refleja en la pantalla. Entre mayor distancia hay entre la pantalla y el proyector más grandes se ven las imágenes.



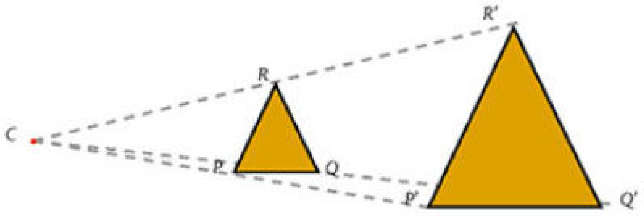
Actividad 3. Observa la figura, y haz lo que se pide.

a) Mide la distancia que hay entre las imágenes y el proyector.

b) Comprueba que la distancia que hay entre el lente del proyector y la segunda imagen es el doble de la que hay hasta la primera imagen. ¿Se mantiene esa proporción en el tamaño de las imágenes? ¿Por qué? ____________________

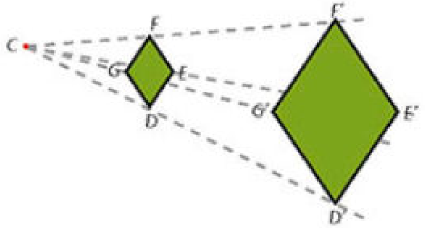
Actividad 4. Determina las razones que se piden con los datos de las siguientes figuras. Compara tu resultado con el de los otros compañeros. En caso de que haya diferencias, verifiquen medidas y comenten sus procedimientos.

a)



Razón	Valor numérico	Razón	Valor numérico
CP'/CP		$P'R'/PR$	
CQ'/CQ		$R'Q'/RQ$	
CR'/CR		$P'Q'/PQ$	

b)



Razón	Valor numérico	Razón	Valor numérico
CD'/CD		$D'E'/DE$	
CE'/CE		$E'F'/EF$	
CF'/CF		$F'G'/FG$	
CG'/CG		$G'D'/GD$	

c) ¿Qué observan acerca de la propoción de los lados homólogos de las figuras? ____________________

d) ¿Los triángulos de la figura son semejantes o congruentes? ¿Por qué? ____________________

e) En grupo, comenten las respuestas a las preguntas anteriores. Verifiquen sus respuestas con apoyo del profesor.

PARA TENERLO PRESENTE

La *homotecia* es la transformación de una figura, de manera que una figura será homotética a otra si son semejantes.

Al igual que en la rotación, la traslación y la reflexión, en la homotecia se conserva la forma de la figura y la medida de sus ángulos internos. Pero, a diferencia de aquellas, la homotecia modifica las dimensiones de los lados de un polígono.

Para conocerla se parte de un punto fijo llamado *centro de homotecia*, se multiplican todas las distancias a los vértices por una constante que se conoce como *razón de homotecia* $r = OP'/OP$.

Cuando la razón de homotecia es un número mayor que 1, la figura se amplía. Cuando es un número entre 0 y 1, la figura se vuelve más pequeña. Cuando es un número negativo, aparece al otro lado del centro de homotecia.

Aplicación

En la antigüedad, se descubrieron dos hechos relevantes utilizando triángulos semejantes. El primero fue la determinación del radio de la Tierra en el siglo III a. n. e., acontecimiento que se debe a Eratóstenes; el segundo sucedió en el siglo II a. n. e., cuando Aristarco determinó el tamaño de la Luna.

Investigo

Investiga cómo se utilizó la semejanza para determinar el tamaño de la Tierra y de la Luna en la antigüedad. Compara los resultados obtenidos en esa época con los actuales.

Razono

¿Qué sucederá si el centro de homotecia está dentro de la figura? Comenta con tus compañeros y lleguen a una conclusión.

REFLEXIONA Y RESPONDE

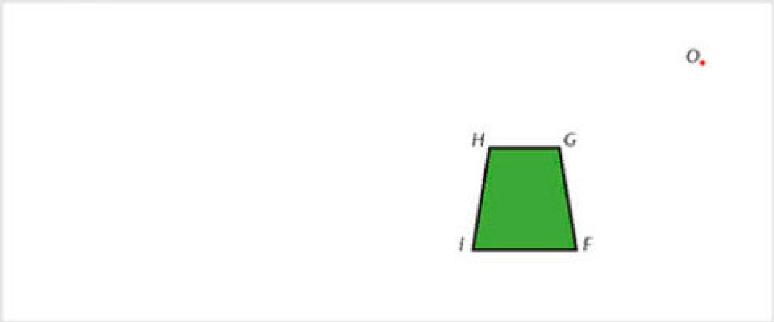
¿Las figuras que analizaste anteriormente son homotéticas? Argumenta tu respuesta.

Razono

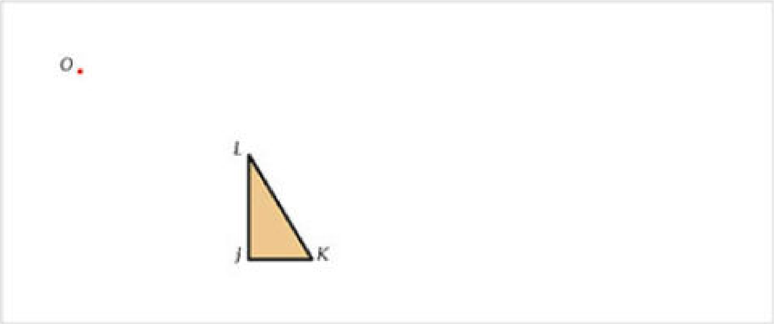
Se dice que dos figuras cuya razón de homotecia es 1 son congruentes. ¿Seguirán siendo congruentes si la razón de homotecia es −1? Argumenta tu respuesta.

Actividad 5. Traza desde el correspondiente punto fijo O, las figuras homotéticas con la razón que se indica. Al terminar, reúnete con dos compañeros y compartan sus procedimientos. Después, validen sus respuestas con ayuda de su profesor.

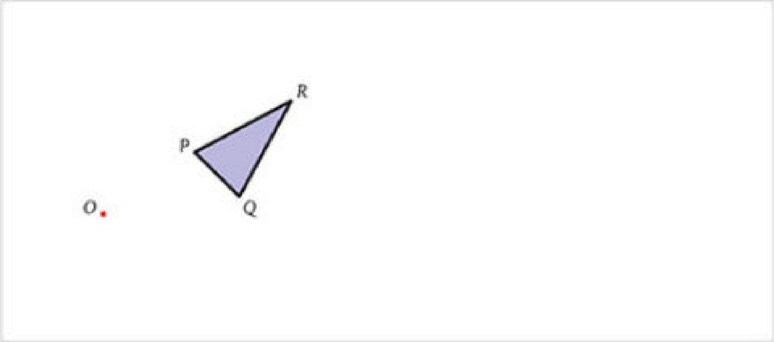
a) Razón: $\frac{1}{2}$



b) Razón: $\frac{3}{4}$

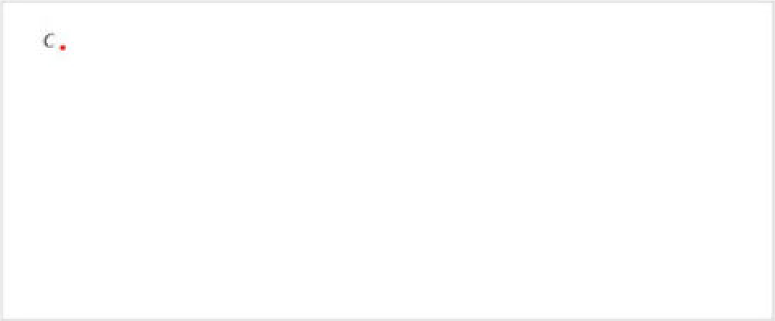


c) Razón: 3

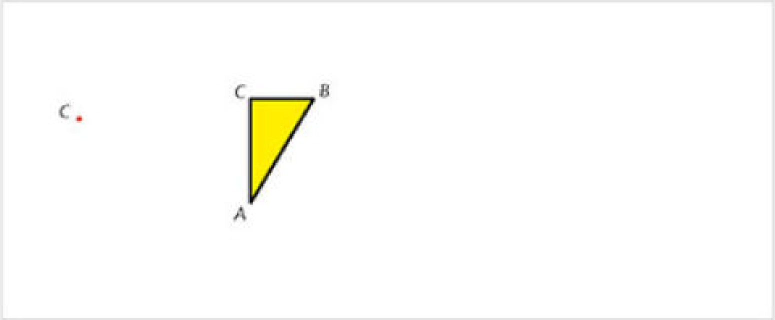


Actividad 6. En tu cuaderno, haz los trazos que se te piden en cada caso. Al terminar, comenta el procedimiento que desarrollaste para cada caso. Si fuera necesario, corrije.

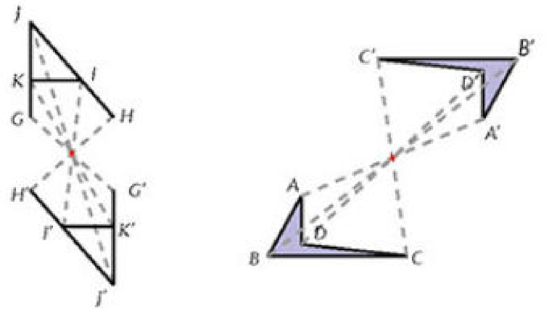
a) Considera el punto C como centro de homotecia, escribe a la derecha la inicial de tu nombre y traza su imagen homotética con razón: $\frac{3}{2}$.



b) Dado el triángulo ABC y considerando el punto C como centro de homotecia, traza en el siguiente espacio las figuras homotéticas cuya razón sea $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.



c) En equipo, observen las figuras y comenten en qué consiste la homotecia inversa con razón −1.



Revisen de manera grupal las respuestas de esta actividad. Argumenten sus razonamientos y comenten sus procedimientos. Corrijan lo que sea necesario y consulten a su profesor para aclarar dudas.

Razono

Cuando dos figuras presentan simetría central o una rotación de 180°, ¿coinciden con la razón de homotecia −1?

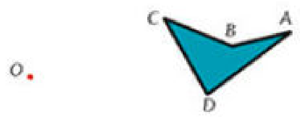
PARA TERMINAR

Razono

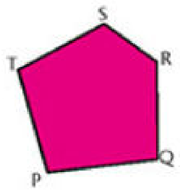
Cuando dos figuras presentan homotecia inversa y su razón es −1, también se pueden obtener mediante simetría central. ¿De cuántos grados es la rotación? Comenta con tu grupo tu respuesta.

Resuelve los siguientes problemas de manera individual.

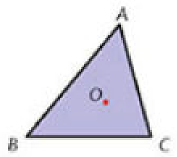
1. Traza una figura homotética al cuadrilátero *ABCD*, con razón −2.



2. Traza la figura homotética al polígono *PQRST*, con centro de homotecia en el vértice *P* y razón $\frac{1}{2}$. Compara tu trazo con el que efectuó el compañero más cercano.



3. Traza una figura homotética al polígono *ABC*, considera como centro de homotecia el punto *O* y la razón $-\frac{1}{2}$.



Usa las TIC

Si tienes oportunidad de trabajar en computadora, revisa el video que aparece en la siguiente dirección: https://www.youtube.com/watch?v=7TNzYi7vWQs (consultado el 2 de diciembre de 2016).

4. Utilizando homotecia, traza algún diseño propio y preséntalo al grupo.

Revisen de manera grupal sus respuestas y valídenlas con la orientación del profesor. Corrijan y consulten sus dudas.

Contenido

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

3.5. Lectura y construcción de gráficas I

LO QUE SÉ

Resuelve los siguientes problemas según se indique.

1. Miguel está por abordar un taxi y, mientras espera, lee un pequeño letrero que anuncia la tarifa. El banderazo, o sea, la cuota que se paga al abordar el taxi es de $6.78. Después, la tarifa aumenta 73 centavos cada 700 m. La distancia que Miguel recorrerá es de 6.3 kilómetros.
   a) Con la información anterior, completa la siguiente tabla para conocer el costo del viaje en taxi.

Distancia recorrida(m)	Costo del viaje ($)
0	
700	
1400	
2100	
2800	
3500	
4200	
4900	
5600	
6300	

   b) Encuentra una expresión algebraica que describa la relación entre las variables distancia y costo del viaje y anótala en la línea. ____________
   c) En tu cuaderno, grafica la información de la tabla. ¿Qué aspecto tiene la gráfica?
   d) Comenta con tus compañeros las caracterísiticas de tu gráfica y valídenla con ayuda de su profesor. Revisa tus resultados y procedimientos con el resto del grupo. Establezcan una conclusión grupal.

2. En equipos, resuelvan las siguientes ecuaciones. Comparen su procedimiento y resultados con los de otros equipos.

   a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

   b) $105 = x + 2x^2$

3. En equipos, resuelvan las ecuaciones llevándolas primero a la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Comparen su procedimiento y resultados con los de otros equipos.

a) $x(x + 3) = 5x + 3$

b) $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = -23$

CONSTRUYO

Aplicación

En el Centro Europeo de Física de Partículas (CERN), ubicado en Suiza, se analizan, entre otras cosas, las colisiones entre partículas subatómicas. Dichas colisiones no se pueden ver, pero sí las curvas que describen las partículas después de chocar, las cuales se grafican en un espacio cartesiano de tres dimensiones.

Formen equipos y resuelvan las siguientes actividades.

Actividad 1. Jorge y Ulises son amigos, pero siempre están compitiendo entre ellos para saber quién es más fuerte, más rápido, etcétera. Un día deciden probar su fuerza lanzando una pelota hacia arriba y saber quién puede lanzarla más alto. Van al parque más cercano y comienzan a lanzarla por turnos con todas sus fuerzas. Después de varios intentos, no logran decidir quién la lanzó más alto, así que deben hacer algunas mediciones. A Jorge se le ocurrió medir el tiempo que tardaba la pelota en subir y bajar, porque así no sería necesario medir la altura, ya que entre más tarde la pelota en regresar al punto de origen, más alto habrá subido. Ulises estuvo de acuerdo y registraron sus resultados en una tabla:

Lanzamiento	Jorge	Ulises
1	2.3 s	2.7 s
2	2.1 s	2.9 s
3	2.5 s	2.5 s
4	2.3 s	2.3 s
5	1.9 s	2.1 s

Recordaron que en su clase de Física el profesor mencionó que para calcular la altura de un objeto que sube o baja se puede utilizar la ecuación $h = \frac{gt^2}{2}$, donde h representa la altura, g, la aceleración de la gravedad que vale $9.81 \frac{m}{s^2}$, y t, el tiempo.

a) Utilizando la ecuación anterior, completen la tabla, pero consideren que el tiempo que Jorge y Ulises midieron fue de subida y de bajada, y ellos solo quieren calcular la altura máxima que alcanzó la pelota desde donde fue lanzada, o bien, la altura desde la que cayó.

Lanzamiento	Tiempo de Jorge	Altura de Jorge	Tiempo de Ulises	Altura de Ulises
1				
2				
3				
4				
5				

b) ¿Qué deben hacer con los tiempos antes de sustituirlos en la ecuación?

c) En promedio, ¿quién lanzó más alto la pelota?

d) ¿Qué datos permitirían hacer un mejor análisis de la situación? ¿Por qué? Comenten su razonamiento con el grupo. Concluyan con ayuda de su profesor.

Para que Jorge y Ulises determinen quién fue el ganador, harán una gráfica con sus resultados. Ayúdales a elaborarla en la siguiente cuadrícula, colocando la altura en el eje de las ordenadas (y) y el tiempo en el eje de las abscisas (x). Utilicen un color diferente para cada gráfica.

e) ¿Cómo pueden afirmar quién lanzó la pelota más alto? Con base en la gráfica, justifiquen su respuesta.

f) Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten sus procedimientos y consulten sus dudas con el profesor.

Investigo

Con las colisiones provocadas a altas energías, se logró descubrir la llamada *partícula de Dios*, el 4 de julio de 2012. Investiga de qué partícula se trata y cuál fue el procedimiento para encontrarla analizando gráficas.

¿Sabías que...

Un espejo parabólico concentra sus rayos en un solo punto? Este hecho era conocido por Arquímedes quien, según se cuenta, incendió la flota romana en Siracusa aplicando este principio.

PARA TENERLO PRESENTE

En matemáticas, las gráficas se construyen en el plano cartesiano utilizando *ecuaciones*. Por ejemplo, para construir la gráfica de una línea recta sabemos que:

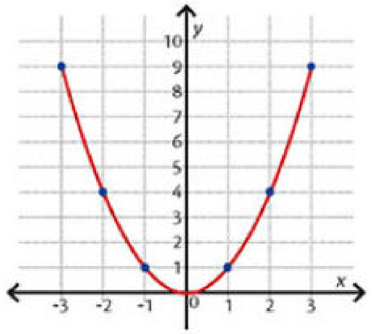
- la ecuación corresponde a la forma $y = x$, en donde x, representa la variable independiente,
- y representa la dependiente,
- si colocamos en una tabla valores de ambas variables y luego ubicamos los puntos de coordenadas en el plano cartesiano, el resultado será una línea recta.

Aplicación

En biología, existen modelos para describir el crecimiento de una población que hacen uso de funciones cuadráticas para modelar el número de individuos.

Actividad 2. En equipos, observen la siguiente tabla con los valores de ambas variables para la ecuación $y = x^2$ y la gráfica que se forma en el plano cartesiano.

Valores de x	Valores de y
- 3	9
- 2	4
- 1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



En parejas, respondan las siguientes preguntas y compartan con el resto del grupo sus respuestas.

a) ¿Hacia dónde abre la curva? ____________________

b) ¿Cómo es la gráfica respecto al eje de las ordenadas? ____________

c) ¿Cuál es el punto más bajo de la gráfica? ____________

REFLEXIONA Y RESPONDE

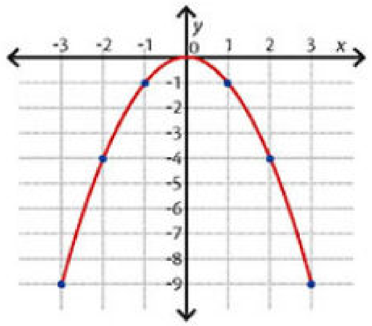
Si modificamos la ecuación de una línea recta y la transformamos en $y = x^2$, asignamos valores a x, determinamos los de y y graficamos los puntos en un plano cartesiano, ¿qué obtendríamos? ¿Por qué? Discute con tu grupo sus argumentos, y anota la conclusión grupal en la siguiente línea.

____

____

Actividad 3. Resuelve la siguiente actividad de forma individual y en tu cuaderno contesta las preguntas.

Valores de x	Valores de y
- 3	
- 2	
- 1	
0	
1	
2	
3	



a) Al escribir la ecuación como $y = -x^2$ se obtiene la gráfica siguiente. Analiza la gráfica y completa la tabla con los valores que le corresponden a cada variable.

b) Analiza las diferencias de esta gráfica y sus valores con respecto a la anterior y determinen por qué es así.

c) Si se deseara mover el origen de la gráfica sobre el eje x, ¿cómo debería modificarse la ecuación? Comprueba tu razonamiento.

d) ¿Cómo se debe modificar la ecuación cuadrática $y = ax^2$ para que el punto más bajo de la parábola no cruce por el origen? Comprueba tu razonamiento.

e) Comenta en plenaria tus argumentos y lleguen a una conclusión grupal con ayuda de su profesor.

PARA TENERLO PRESENTE

Si graficamos la ecuación $y = ax^2$ asignando valores a x y determinando los de y notaremos que el resultado es una curva conocida como parábola.

En general, mientras más grande es el valor de a, la gráfica estará más cerca del eje de las ordenadas.

Aplicación

La órbita de algunos cometas que no tienen periodo puede describirse por medio de una parábola. Muchos de ellos se derriten a su paso cerca del Sol y desaparecen para siempre.

Actividad 4. Reúnete con un compañero y analicen las siguientes ecuaciones con base en los mencionado anteriormente y comenten con su grupo en qué posiciones del plano cartesiano podrían encontrarlas. Anoten su respuesta consensuada sobre la línea.

a) $y = -0.5x^2$ ____________

b) $y = -2x^2$ ____________

c) $y = -2x^2 + 2$ ____________

d) $y = -2x^2 - 2$ ____________

Actividad 5. Contesta las siguientes actividades de manera individual.

a) En tu cuaderno, construye las tablas de valores y las gráficas que corresponden a cada una de las ecuaciones.

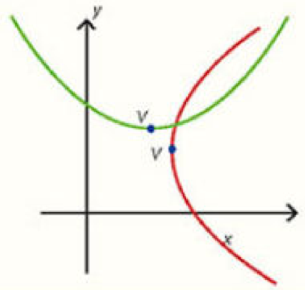
b) En cada caso, analiza cuáles son los términos de la ecuación que modifican su ubicación en el plano cartesiano.

c) ¿Tu gráfica se parece a las predicciones comentadas al principio de la actividad? ¿Por qué? Comenta en plenaria qué pasó con tus predicciones y valida tus razonamientos con ayuda de su profesor.

PARA TENERLO PRESENTE

El vértice de una parábola no es siempre el punto más bajo. Cuando la parábola abre hacia abajo, el vértice es ahora el punto más alto.

Cuando agregamos un término lineal, es decir, si la ecuación cuadrática toma la forma $y = ax^2 + bx + c$, el vértice de la parábola no está en el origen y se ubica fuera de cualquiera de los ejes del plano.

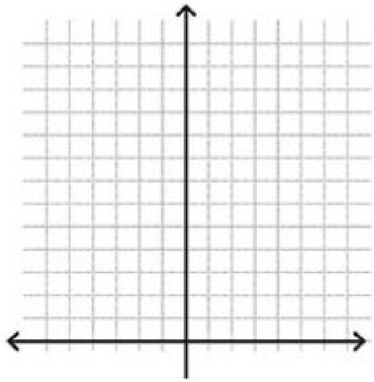


PARA TERMINAR

Resuelve las siguientes actividades de manera individual.

1. Teniendo la ecuación $y = x^2 + x + 1$, donde $a = b = c = 1$, construye la tabla de valores y grafica la ecuación en la cuadrícula.

Valores de x	Valores de y



a) ¿En qué valor se encuentra el vértice de la parábola? ___________

b) Escribe la ecuación si tuvieras que mover la parábola 2 unidades a la derecha. ___________

c) Escribe la ecuación si tuvieras que abrir hacia abajo. ___________

d) Comenta en plenaria tus respuestas y valida tus razonamientos con ayuda de tu profesor.

2. Analiza las ecuaciones siguientes y completa el siguiente cuadro.

Ecuación	Abre hacia la	El vértice se encuentra en	El máximo o mínimo se encuentra en
$y = 2x^2 + 2x + 2$			
$y = -2x^2 + 2x - 2$			
$y = 2x^2 - 2x + 2$			
$y = -2x^2 - 2x - 2$			

a) ¿Qué aspecto comparten las gráficas anteriores? ¿En qué son diferentes? ___________

b) En plenaria, revisen sus respuestas en la tabla y al inciso anterior. Junto con su profesor elaboren una conclusión para esta actividad.

Usa las TIC

En *GeoGebra* http://www.geogebra.org/cms/es/ puedes descargar de manera gratuita una plataforma para hacer gráficas no solo de ecuaciones cuadráticas sino de cualquier tipo. (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Contenido

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

3.6. Lectura y construcción de gráficas II

LO QUE SÉ

Reunidos en parejas, analicen las siguientes situaciones y respondan lo que se les pide.

1. El estudio y la correcta interpretación de gráficas permite que puedan analizarse fenómenos que incluso no pueden verse a simple vista, como la interacción entre partículas elementales (protones, neutrones, electrones, etc.), y también fenómenos que ocurren en el Universo como la muerte de una estrella, la formación de nuevas estrellas o el descubrimiento de un nuevo planeta fuera del Sistema Solar.

   Por ejemplo, una técnica utilizada para detectar la existencia de un planeta, es medir el brillo de una estrella durante un periodo y analizar si este disminuye en algún intervalo. La mayoría de las veces los planetas son demasiado pequeños en comparación con el tamaño de la estrella y, por lo tanto, son difíciles de descubrir. En la imagen de la derecha se muestra la gráfica de cómo puede detectarse la existencia de un planeta orbitando alrededor de la estrella.

a) De acuerdo con la gráfica, ¿qué ocurre con el brillo de las estrellas conforme pasa el tiempo? ___________

b) ¿Qué forma tiene la gráfica? ___________

c) ¿Qué ecuaciones modelarían esta situación? Anótenlas. ___________

d) En plenaria, expongan sus respuestas de pareja y escuchen las del resto de sus compañeros. Al terminar, escriban una respuesta para cada caso y valídenla con su profesor.

2. En la lección anterior aprendieron cómo graficar ecuaciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Grafiquen las siguientes ecuaciones en su cuaderno. Comparen su procedimiento y resultados con otros equipos.

a) $-x^2 + 3x - 3$

b) $x^2 + 4x + 4$

3. En equipos y en su cuaderno, resuelvan y grafiquen las siguientes ecuaciones. Comparen su procedimiento y resultados con el resto del grupo. Noten que las soluciones de cada ecuación corresponden con puntos estratégicos de la parábola, anoten cuáles son los puntos.

a) $-x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $(x - 3)^2 + 2(x - 3) + 1 = 0$

c) $(x - 1)^2 + 2(x - 1) + 3 = 0$

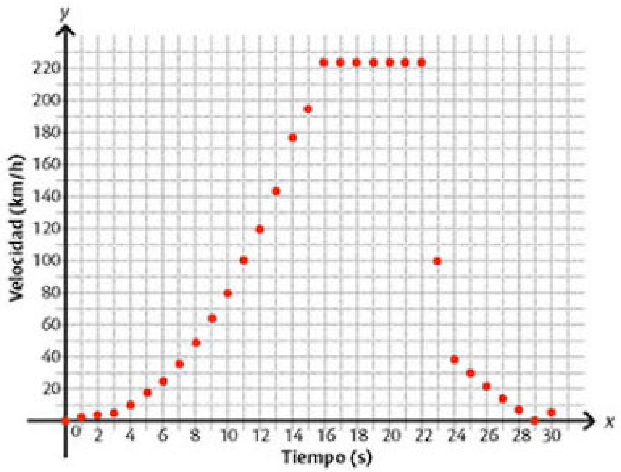
x	y
0	0
1	3
2	3
3	9
4	12
5	15
6	25
7	36
8	49
9	64
10	81
11	100
12	121
13	144
14	169
15	196
16	225
17	225
18	225
19	225
20	225
21	225
22	225
23	100
24	38
25	30
26	22
27	14
28	6
29	0
30	3

CONSTRUYO

Reúnete con dos compañeros para resolver los siguientes problemas.

Actividad 1. Una fábrica construye y diseña automóviles con base en modelos cada vez más aerodinámicos. Una vez construidos, los automóviles son llevados a un circuito para que un piloto profesional los maneje en situaciones límite, es decir, acelerar al máximo, frenar a esa velocidad, mantener cierta velocidad y tomar curvas muy cerradas, entre otras pruebas.

Para que el equipo de calidad determine si el diseño es el adecuado, conectan miles de sensores al automóvil y reparten otros tantos por la pista para poder recolectar los datos reales y graficarlos. Un ejemplo de estas gráficas es el siguiente:



Observa que en el eje de las ordenadas (y) se graficó la velocidad, mientras que en el de las abscisas (x) se graficó el tiempo.

a) ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el automóvil? __________

b) ¿La velocidad cambia durante todo el trayecto? ¿Por qué? __________

c) ¿Cómo se relaciona la gráfica con los cambios de velocidad? __________

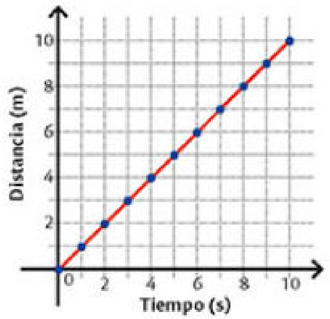
c) ¿Durante qué tiempo acelera y durante qué tiempo desacelera? __________

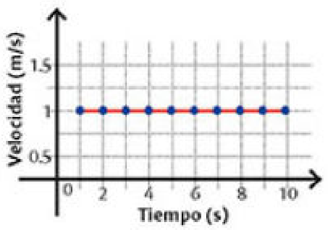
d) Si analizas la gráfica de los automóviles de carreras, ¿en qué intervalo se presenta un MUA? Justifica tu respuesta. __________

e) ¿Cómo puedes saber si el automóvil tiene mucha potencia en el motor y acelera a un buen ritmo? __________

f) Revisen sus respuestas con otro equipo. Compartan sus procedimientos y comenten con el resto del grupo sus respuestas. Al terminar, verifiquen sus respuestas con ayuda de su profesor.

Actividad 2. En un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) la velocidad del objeto es constante en todo momento, esto obliga a que el objeto en movimiento recorra distancias iguales en tiempos iguales. Supongamos que queremos construir las tablas de un MRU y conocemos el tiempo empleado, la distancia recorrida y la velocidad ya graficados, como se muestra enseguida.





a) Completen la tabla de datos con la información faltante. Apóyense en las gráficas.

Tiempo (s)	Distancia (m)	Velocidad (m/s)
	0	
	1	
	3	
	6	
	7	
	10	

b) ¿Cuál es la tendencia que presenta cada una de las gráficas? __________

c) ¿En qué intervalo de la gráfica del automóvil se presenta algo similar a lo que sucede en la gráfica de la Actividad 1? Consideren lo que se representa en cada eje.

d) ¿Cómo se interpreta la información de la gráfica del automóvil en esos intervalos?

e) ¿En cuántos intervalos de la gráfica se presenta un MRU? Justifiquen su respuesta.

f) Compartan con otros equipos su resultados y comenten sus razonamientos. Con ayuda del profesor, validen sus respuestas.

Aplicación

En tu curso de Ciencias II (con énfasis en Física), analizaste dos tipos de movimiento en particular. Uno fue el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y otro el movimiento uniformemente acelerado (MUA). El MRU se caracteriza porque los objetos describen una trayectoria en línea recta y su velocidad es constante, en cambio el MUA se caracteriza porque la velocidad de los objetos varía de acuerdo con el tiempo y esta puede aumentar o disminuir a un ritmo constante.

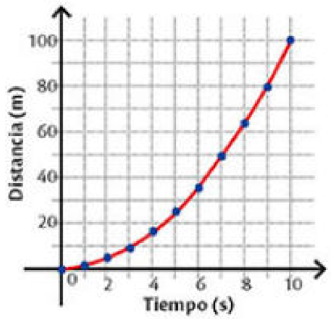
Actividad 3. La física estudia un movimiento uniformemente acelerado llamado *tiro vertical* en el que un objeto es lanzado hacia arriba desde cierta altura. El objeto, a medida que sube, va disminuyendo su velocidad y cuando alcanza la altura máxima, se detiene por un brevísimo instante y comienza a caer acelerando y, por tanto, aumentando su velocidad.

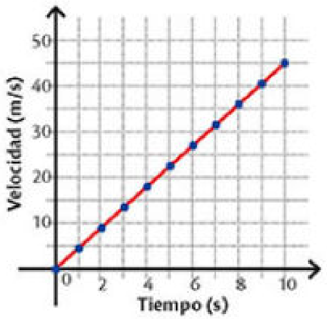
La tabla de datos y las gráficas de un MUA como el descrito anteriormente son las siguientes:

Aplicación

Los fabricantes de recipientes de todo tipo necesitan saber el volumen exacto que contendrán cada uno de ellos. Para tal fin, diseñan los recipientes, los elaboran y mediante unas máquinas los llenan con líquido, que es cuidadosamente medido y graficado para hacer un análisis detallado de la velocidad de llenado y la capacidad del recipiente.

Tiempo (s)	Distancia (m)	Velocidad (m/s)
0	0	0
1	1	4.42
2	4	8.85
3	9	13.28
4	16	17.17
5	25	22.14
6	36	26.57
7	49	31
8	64	35.43
9	81	39.86
10	100	44.29





a) Observen la diferencia entre las gráficas obtenidas para el MRU de la actividad y las que obtuvieron para el MUA.

b) ¿Por qué las gráficas de *d vs. t* tienen una diferencia tan notoria?

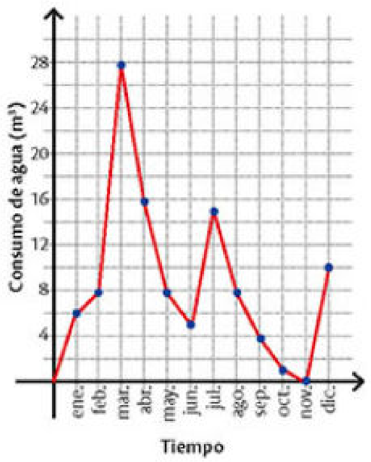
____

c) ¿Cómo interpretas la información de ambas gráficas tanto en el MRU como en el MUA? ____

d) Comenten entre todos sus argumentos y lleguen a una conclusión grupal, con ayuda de su profesor.

Actividad 4. Responde las preguntas de acuerdo con los problemas que se plantean. Al finalizar compara tus procedimientos y verifica tus respuestas con las de tus compañeros.

1. La compañía de agua envía a los usuarios un reporte anual de consumo que incluye la gráfica en donde se presenta el consumo de agua en metros cúbicos.



a) ¿Qué tipo de tendencia existe en el consumo de enero a marzo?

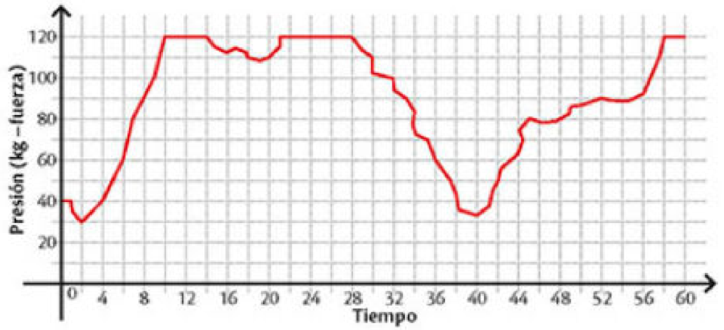
b) ¿Qué tipo de tendencia existe en el consumo de marzo a junio?

c) ¿Qué tipo de tendencia existe en el consumo de julio a noviembre?

d) ¿En qué intervalos se presenta la misma tendencia en la gráfica?

e) ¿El consumo es mayor o menor cuando hay una tendencia lineal o cuadrática? Justifica tu respuesta. ____

2. En un taller mecánico cuentan con un pistón neumático para levantar automóviles y poder lavar el motor y cambiar el aceite entre otros servicios. La computadora grafica el uso que se le da al pistón para determinar si la presión que ejerce la bomba de aire funciona correctamente. La gráfica se muestra a continuación:



a) Describe en intervalos el tipo de tendencia que se muestra en la gráfica.

b) ¿Cómo interpretas lo que pasa con el pistón dependiendo de la tendencia?

c) ¿Qué está ocurriendo físicamente en el pistón durante los tres intervalos en que la presión llega a un nivel máximo?

d) ¿Qué ocurre físicamente en el pistón cuando la curva de la gráfica es descendente?

e) Comparen sus respuestas con otro equipo y valídenlas con orientación de su profesor. De manera grupal, compartan comentarios sobre sus razonamientos y procedimientos.

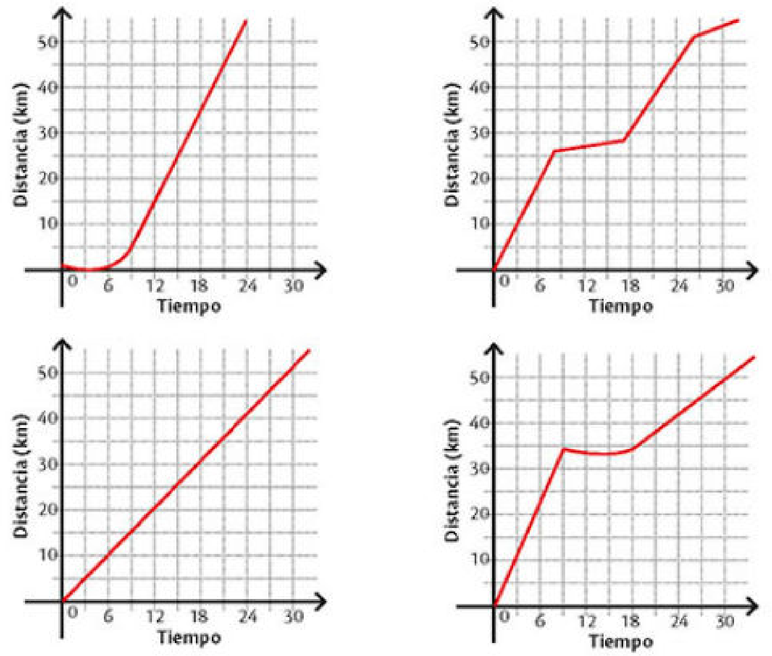
Actividad 5. Reúnete con un compañero e identifiquen cuál es la gráfica que corresponde a cada caso.

Usa las TIC

Si tienes acceso a una computadora e internet, visita el sitio www.matematicasonline.es/anaya/anaya1ESO/datos/14/05.htm (consultado el 2 de diciembre de 2016) y resuelve las actividades que ahí se proponen.

1. El Circuito exterior mexiquense, cuenta con varios ramales y uno de sus recorridos es el que se muestra en la tabla. Justifiquen su respuesta y escuchen las de sus compañeros.

Recorrido	Kilómetros	Tiempo de recorrido
Jorobas - Zumpango	15.17	10 minutos
Zumpango - Lechería	18.92	12 minutos
Lechería - Carlos Hank	3.52	2 minutos
Carlos Hank - Peñón Texcoco	12.19	8 minutos

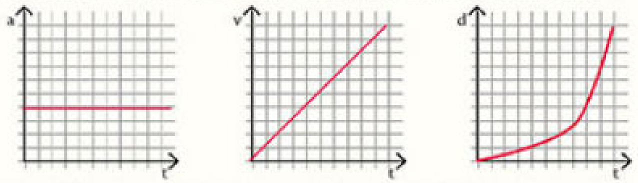


Recuerda que...

Las gráficas nos permiten visualizar fenómenos de una manera más accesible, clara e inteligible, sin embargo, es importante saber leer e interpretar los resultados ahí mostrados para poder obtener resultados precisos y, en la medida de lo posible, exactos.

PARA TENERLO PRESENTE

Mediante las gráficas podemos representar información de situaciones cotidianas, como el movimiento de proyectiles, la velocidad de un auto de carreras, entre otros fenómenos. En el siguiente conjunto de gráficas se representa un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.



Al utilizar gráficas de cantidades proporcionales (o lineales) y cuadráticas (parábolas) se puede modelar un sistema físico o de otra índole.

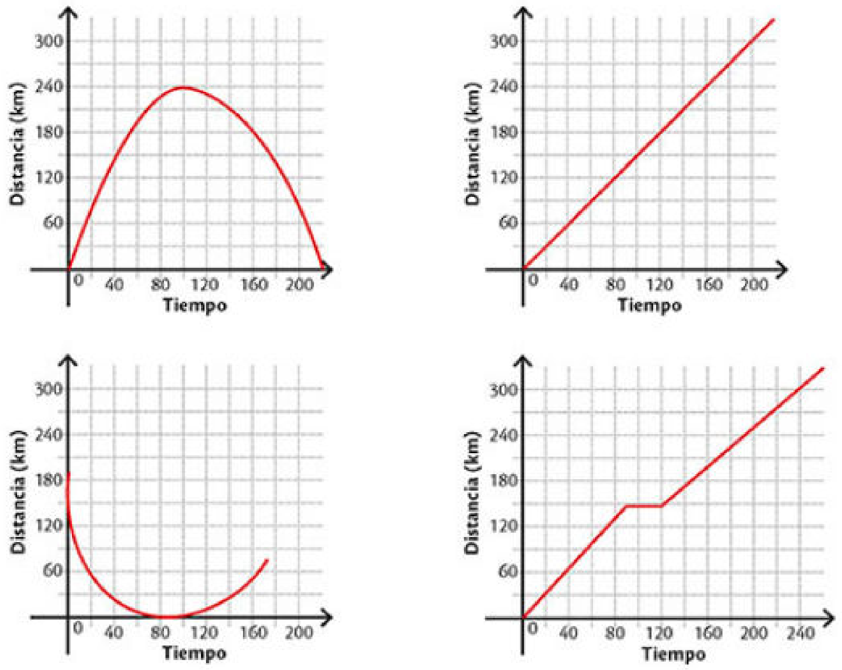
PARA TERMINAR

De manera individual, responde cada caso. Al terminar, valida tus respuestas y procedimientos con apoyo de tu profesor.

1. Observa en el mapa el tiempo y el kilometraje que debe recorrerse para llegar a Cuetzalan, Puebla, desde la ciudad de México si se pasa por el centro de Puebla y se toma media hora para desayunar.

En distancia:
México - Cuetzalan // 305 km
México - Puebla // 123 km
Puebla - Cuetzalan // 182 km

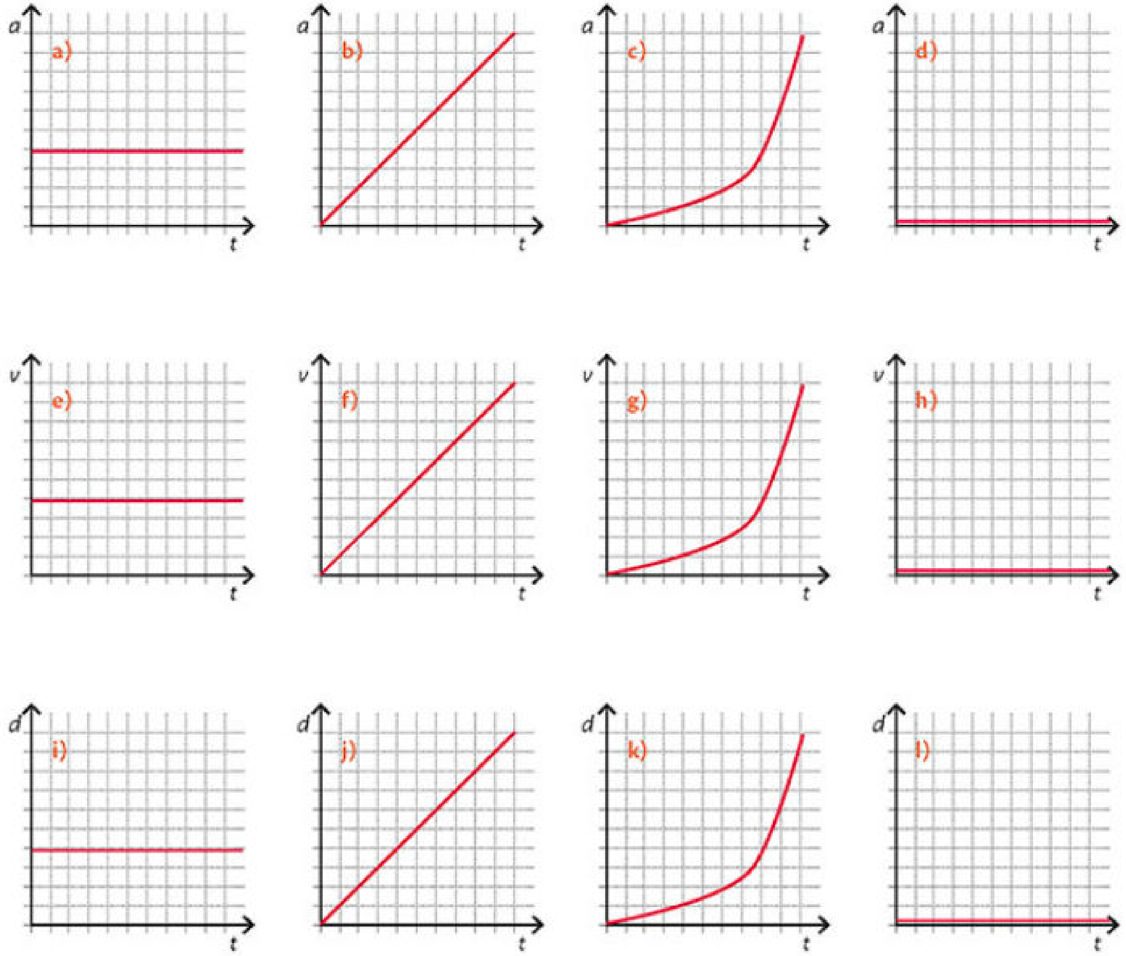
En tiempo:
México - Cuetzalan // 4 horas, aprox.
México - Puebla // 1:30 horas, aprox.
Puebla - Cuetzalan // 2:30 horas, aprox.



a) ¿Cuál de las gráficas representa a este planteamiento? Justifica tu respuesta.

b) Compara tu respuesta con la de otro equipo e intercambia argumentos acerca de tu razonamiento.

2. Observa las gráficas y responde las preguntas. Al finalizar, compara tus resultados con los de tus compañeros y comenten sus razonamientos.



a) ¿Cuáles gráficas corresponden a un movimiento rectilíneo uniforme? ______

b) ¿En alguna gráfica no hay movimiento? Argumenta. ______

c) ¿En cuáles gráficas se puede interpretar aceleración? ______

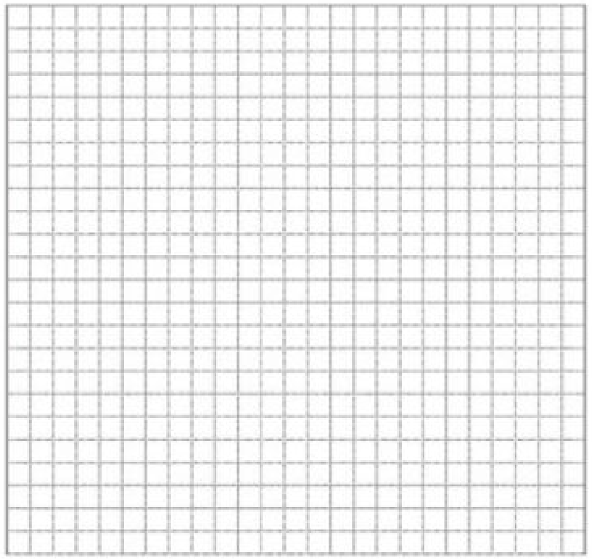
d) ¿Cómo se interpreta la gráfica *g*? ______

Usa las TIC

Lee un poco más acerca del MRU, visita la página "Movimiento rectilíneo", en *Profesor* http://goo.gl/buFNl (consultado el 2 de diciembre de 2016).

3. Un señor, al salir para su trabajo, calienta su automóvil durante la marcha por los primeros 10 minutos a una velocidad de 20 km/h. Después de los 10 min, acelera a 60 km/h durante 10 min y al entrar a la autopista mantiene una velocidad de 90 km/h por 30 min. Finaliza su recorrido a una velocidad de 60 km/h por 10 minutos. (recorrido de un señor en su automóvil para ir a su trabajo).

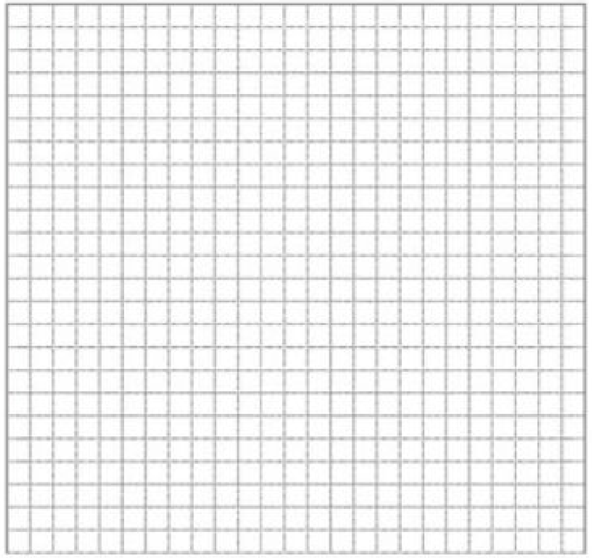
Traza la gráfica que corresponde a esta situación.



Investigo

Investiga cómo ha evolucionado el diseño y la construcción de latas para alimentos en los últimos años. Analiza las características que tiene una lata de refresco: volumen que contiene, material, grosor; así como las de las máquinas que las llenan, por ejemplo, la velocidad de llenado.

4. En un parque de diversiones, la rueda de la fortuna más pequeña tiene 12 canastillas y una altura de 42 m. Al dar la primera vuelta tarda 20 min para que las personas ocupen las canastillas, considerando 10 s en cada parada. Representa gráficamente el tiempo que tardan en llegar a la parte más alta los ocupantes de la primera canastilla.



Contenido

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

3.7. Probabilidad de eventos independientes

LO QUE SÉ

Reúnanse en equipos para llevar a cabo las siguientes actividades.

1. Escriban en la tabla siguiente la probabilidad de que al lanzar una perinola que tiene en sus caras los números del 1 al 5, el resultado sea…

Evento	Probabilidad
el número 2.	
un número distinto de 2.	
un número par.	
un número non.	
un número menor que 4.	
un número mayor que 4.	

a) De acuerdo con las probabilidades, ¿cuáles eventos son más factibles? ¿Cuáles no? Anótenlos en la columna correspospondiente.

Muy probable	Poco probable

b) Comenten con el grupo sus respuestas y razonamientos. Si encuentran diferencias, justifiquen su elección y lleguen a una respuesta común.

2. Por turnos, cada integrante del equipo tire los dos dados y registren los resultados. Cada uno deberá lanzar al menos tres veces los dados.

a) ¿Cuáles son los posibles resultados que pueden obtener? ______
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en la suma resulte el número 10? ______
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en la suma resulte el número 7? ______
d) ¿Qué resultados tienen más posibilidad de salir de la suma de puntos? ______

Comparen sus respuestas y comenten sus razonamientos con otro equipo. Corrijan lo que sea necesario.

Aplicación

La actual teoría de la probabilidad se usa de manera regular en todas las áreas del conocimiento para obtener información acerca de la posibilidad de ocurrencia de sucesos y facilitar la toma de decisiones.

Recuerda que...

Si la probabilidad de un evento es un número cercano a cero, entonces la probabilidad de que el evento ocurra es escasa. Si la probabilidad es un valor cercano a 1, entonces es casi seguro que el evento ocurra. Cada vez que un espacio muestral esté formado por n posibles resultados igualmente probables, la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos sera $1/n$.

3. Escriban el espacio muestral de los siguientes fenómenos.
a) Lanzamientos consecutivos de tres dados. ______
b) Lanzamiento de una moneda y un dado. ______
c) Sacar tres canicas sin reemplazo de una bolsa que contiene una blanca, una azul y una amarilla. ______
d) Sacar dos bolas con reemplazo de una urna que contiene una roja, una negra y una azul. ______
e) Compartan sus respuestas con el grupo y escuchen los argumentos de los demás. Corrijan si fuera necesario.

4. En un grupo hay 10 hombres y 20 mujeres, de los cuales la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen ojos castaños.
a) ¿Es posible que una persona, tomada al azar, sea hombre o tenga los ojos castaños? ______
b) ¿Es posible que una persona, tomada al azar, sea hombre y tenga los ojos castaños? ______
c) ¿Es posible que una persona, tomada al azar, sea hombre y sea mujer? ______
d) ¿Qué diferencia existe entre los eventos de los incisos anteriores? ______

Comparen sus respuestas y comenten sus razonamientos con otro equipo. Corrijan lo que sea necesario.

CONSTRUYO

Reúnanse en equipos y contesten las siguientes preguntas. Al finalizar, compartan sus resultados con sus compañeros.

Actividad 1. Rodrigo y Gonzalo juegan Turista mundial. Para avanzar, tienen que lanzar dos dados. Rodrigo está calculando sus tiros para adquirir las mejores propiedades.
a) Escriban el espacio muestral. ______
b) Comenten cómo calcular las probabilidades de los eventos siguientes y completen la tabla.

Obtener el número…	Probabilidad
2 en uno de los dados.	
3 en el segundo dado.	
2 en el primero o 3 en el segundo.	
2 en el primero y 3 en el segundo.	

c) ¿Qué diferencia hay entre los eventos anteriores? ______
d) ¿De qué manera afecta el resultado del primer dado al resultado del segundo? ______

Comenten con el grupo sus respuestas y valídenlas con ayuda de su profesor.

HISTÓRICAMENTE

Leibniz, filósofo, matemático y aficionado a los juegos de dados estaba convencido de que era igual de difícil conseguir 11 puntos que 12, al lanzar dos dados, pues ambas puntuaciones sólo se podían conseguir mediante una combinación de dos dados: 6 y 5 en el primer caso y, 6 y 6 en el segundo. En realidad se equivocaba, porque 11 se puede obtener de dos formas: con un 5 en el primer dado y un 6 en el segundo, o con un 6 en el primero y un 5 en el segundo. Haz la prueba tirando los dados muchas veces y comprobarás que salen más a menudo 11 puntos que 12.

¿Sabías que...

La teoría de probabilidad tiene su origen en los juegos de azar?

Actividad 2. Se escogen al azar dos alumnos para verificar si acreditaron la asignatura de matemáticas.

a) ¿Cuáles son los posibles resultados? Escribe el espacio muestral. ______

b) ¿Cuál es el espacio muestral para representar que al menos uno de ellos haya aprobado la materia? ______

c) ¿Cuál es el espacio muestral si ambos reprobaron? ______

d) ¿Cuántos resultados existen para el evento si ambos aprobaron? ______

e) ¿Cuál es el espacio muestral si el número de alumnos aumenta a 5? ______

f) ¿Cuántos elementos tendría el evento en el que, al menos, haya un aprobado? ______

g) ¿Cual es el espacio muestral si en el experimento se incluyen a 10 alumnos? Justifiquen su respuesta. ______

h) Comparen sus respuestas y comenten sus razonamientos con otro equipo. Corrijan lo que sea necesario.

Aplicación

Las dependencias gubernamentales encargadas de medir los niveles de educación en el país llevan a cabo estudios basados en la aplicación de exámenes que miden la probabilidad de que los alumnos de cierta comunidad aprueben o no dicho examen. Con estos datos, se puede saber si el nivel educativo es el indicado para un cierto sector de la población o se debe cambiar ya que en la comunidad no se aplica lo aprendido en el salón de clases.

Actividad 3. En parejas, lean los siguientes casos y escriban en cada paréntesis si el evento es mutuamente excluyente (ME), no excluyente (NE), independiente (I) o dependiente (D). Al terminar, compartan sus argumentos con el grupo y su profesor. Si existieran discrepancias, revisen las dudas y lleguen a una respuesta común con ayuda del maestro.

a) Lanzar una moneda y que el resultado sea águila o sol. ( )
b) Lanzar una moneda y un dado y que salga sol y 6. ( )
c) Al lanzar al aire dos veces seguidas una moneda, que salga águila o sol en el segundo lanzamiento. ( )
d) En un juego de cartas, que al extraer un as sin reintegrarlo al mazo salga otro as. ( )
e) En un juego de cartas, que al extraer un as sin reintegrarlo al mazo salga el mismo as. ( )

PARA TENERLO PRESENTE

La regla del producto para calcular la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes afirma: si la probabilidad de que ocurra un evento M es $P(M)$, la probabilidad de que ocurra un evento N es $P(N)$, entonces la probabilidad de que ocurran los dos es el producto de las probabilidades, es decir, $P(M) \times P(N)$.

Actividad 4. Reúnanse en parejas para resolver en su cuaderno los siguientes planteamientos.

1. Un hospital desea informar a los padres cuál es la probabilidad de que un recién nacido sea diestro $P(D)$ o zurdo $P(Z)$.

a) Calculen las probabilidades de que nazca un bebé diestro $[P(D)]$ o zurdo $[P(Z)]$.
b) Calculen la probabilidad de que el bebé sea niña.
c) Calculen la probabilidad de que el bebé sea niña y zurda.
d) Compartan sus respuestas y procedimientos con otras parejas. Verifíquenlos con apoyo de su profesor.

2. En un salón de clase en la secundaria Simón Bolívar asisten 18 muchachos y 22 chicas; la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos cafés.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga los ojos de un color diferente del café?
c) Compartan sus respuestas y procedimientos con otras parejas. Verifíquenlos con apoyo de su profesor.

Aplicación

En los casinos, se aplica directamente la regla del producto que es con el que menos se pierde al momento de jugar. En la actualidad, se analiza matemáticamente el comportamiento de los juegos de azar para saber si conviene al casino adoptar ese juego para el entretenimiento de los clientes.

Investigo

Investiga qué plantea el teorema de Bayes y cómo lo puedes aplicar en eventos de la vida diaria.

Actividad 5. Se extraen al azar 5 cartas de un mazo de 52 naipes. Consideren que cada mazo tiene cuatro figuras o palos diferentes: trébol, corazón, pica y diamante.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer cuatro ases? ______
b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer cuatro ases y un rey de cualquier figura? ______
c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer tres cincos y dos sotas de cualquier figura? ______
d) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un nueve, un 10, una sota, un caballo y un rey de cualquier figura? ______
e) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un tres de una figura cualquiera y un dos de una figura diferente? ______
f) ¿Cuál es la probabilidad de extraer al menos un as de cualquier figura? ______
g) Con el apoyo de su profesor, verifiquen sus respuestas.

HISTÓRICAMENTE

Blaise Pascal (1623–1662) fue un filósofo, físico y matemático francés que dedicó gran parte de su trabajo al cálculo de probabilidades. Se dice que el triángulo que lleva su nombre lo inventó a petición de algunos de sus amigos a quienes les gustaba apostar y querían saber cuáles eran sus posibilidades al momento de arriesgar su dinero. Hoy en día, el triángulo de Pascal se utiliza no solo para el cálculo de probabilidades sino para determinar los coeficientes que debe tener un binomio a cualquier potencia desarrollada.

PARA TERMINAR

A continuación, responde de manera individual lo que se solicita.

1. En una clase de francés hay 10 alumnas extranjeras, 20 mexicanas, 5 alumnos extranjeros y 10 mexicanos. Un día asisten solo 44 alumnos. Calcula la probabilidad de que el alumno que falta:

   a) sea hombre. ______
   b) sea mexicana. ______
   c) sea hombre extranjero. ______
   d) sea mexicano. ______

2. Para un sorteo se extrae una bola de una urna que contiene 12 bolas blancas, 7 bolas rojas, 4 bolas negras y 1 bola azul.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca? ______
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea azul? ______
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca? ______

3. Los resultados de una encuesta a un grupo de personas mostraron que a 67% de los encuestados les gusta el sabor chocolate en el helado, a 46% la vainilla y 29% escogería ambos. Si seleccionamos a un encuestado de este grupo al azar, ¿cuál será la probabilidad de que:

   a) no le guste ninguno de los dos sabores? ______
   b) le guste la vainilla, pero no el chocolate? ______
   c) le guste el chocolate y no la vainilla? ______
   d) Completa la tabla con los porcentajes arriba mencionados y encuentra los eventos que se te piden.

		Chocolate		Total
		Sí	No	
Vainilla	Sí			
	No			
Total				

Revisen de manera grupal las respuestas de esta sección. Comenten sus procedimientos y consulten sus dudas con el profesor.

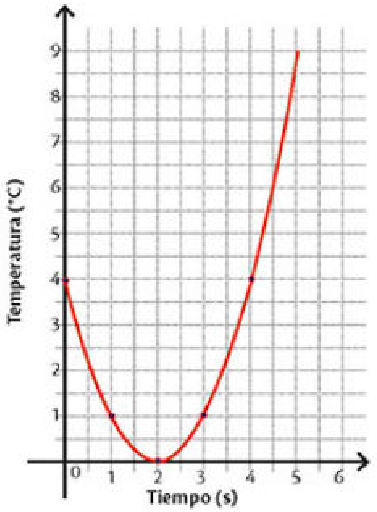
EVALUÁNDOME

I. Resuelve cada una de las siguientes situaciones y encierren la letra del inciso que contenga la respuesta correcta. Al finalizar, revisen en grupo esta prueba, sus resultados y los procedimientos que utilizaron para contestar cada una.

1. Josefina tiene el cuadrado de la edad de Raquel y Lourdes el doble de la edad de Raquel más cinco años. La diferencia de las edades de Josefina y Lourdes es 30, ¿cuál es la edad de Raquel?

   a) 5 años   c) 25 años
   b) 7 años   d) 49 años

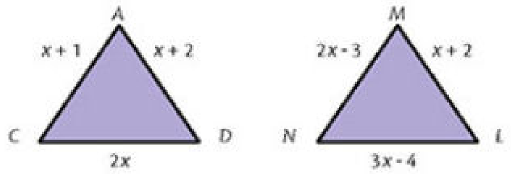
2. En cierto experimento el laboratorio debe mantener su temperatura a 0 °C; una sustancia en observación debe mantenerse a temperatura constante por lo que se encuentra en una estufa que, al detectar que pierde temperatura, se activa y la vuelve a calentar en cuestión de segundos. Esto se muestra en la siguiente gráfica. A partir de lo que se observa en ella, la información correcta está en la opción:



   I. La sustancia se encontraba a una temperatura de 4 °C, en dos segundos llegó a 0 °C, y en un lapso de 4 segundos volvió a la temperatura requerida.
   II. La sustancia se encontraba a una temperatura de 4 °C, en dos segundos llegó a 0 °C, y en un lapso de 2 segundos volvió a la temperatura requerida.
   III. La función que representa a dicho fenómeno es $f(x) = x^2 - 4x + 4$
   IV. La función que representa a dicho fenómeno es $f(x) = x^2 + 4x + 4$

   a) I y III   c) II y III
   b) I y IV   d) II y IV

3. Si los triángulos *ACD* y *MNL* tienen el mismo perímetro, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

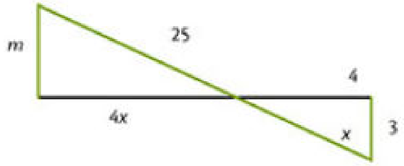


   a) No son semejantes, pues sus lados correspondientes no son proporcionales.
   b) No son congruentes, pues las medidas de sus lados correspondientes no coinciden.
   c) Son congruentes, pues sus lados correspondientes miden lo mismo.
   d) Son semejantes, pues sus lados correspondientes son proporcionales.

4. Las figuras muestran lo que el equipo de José hizo para calcular la altura del edificio escolar: tomaron la estatura de José, se situaron junto al edificio señalado cuando el día estaba soleado y marcaron la sombra de este inmueble así como el punto en que se paró José y el final de su sombra, todo al mismo tiempo, para que los ángulos considerados fueran los mismos. Esto se ilustra con triángulos a continuación.
   La altura del edificio es …

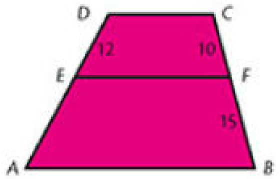
a) 4.4 m
b) 5.2 m
c) 6.6 m
d) 10.8 m

5. ¿Cuál es el valor de *m* en la siguiente figura?



a) 5
b) 8.66
c) 15
d) 20

6. Observa la figura. Considerando que *AB*, *EF* y *DC* son paralelas, *AD* mide:



a) 18
b) 20
c) 29
d) 30

7. Tengo dos números consecutivos: el cuadrado del mayor excede en 57 al triple del menor, ¿cuál es el número menor?

a) −8
b) −7
c) 8
d) 9

8. Se tienen una ficha con una cara roja y otra negra, y un dado común marcado con los números del 1 al 6. Si se lanzan ambos, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea negro y 3?

a) 1/12
b) 1/8
c) 1/6
d) 1/2

Registro mis avances

Tema	Problema	Aciertos	En esta sección marca tu nivel de aprendizaje alcanzado en cada tema. Considera las observaciones de tu profesor			
			Requiero de total apoyo	Necesito practicar	Casi lo domino	Óptimo
Patrones y ecuaciones	1, 7					
Figuras y cuerpos	3, 4, 5, 6					
Proporcionalidad y funciones	2					
Nociones de probailidad	8					
Mi total de respuestas correctas			Mi porcentaje de respuestas correctas			

Escribe qué puedes hacer para mejorar tu aprovechamiento y sugiere qué tipo de apoyos requieres.

____

APLICACIONES MATEMÁTICAS

Matemáticas y salud alimentaria

El manejo de la información nos permite leer e interpretar gráficas que nos dan a conocer tendencias, buscar diversos puntos de vista, hacer inferencias y tomar decisiones para resolver o evitar problemas.

En este contexto, encontramos que, entre otras cosas, el sobrepeso y la obesidad se están convirtiendo en desafíos para la salud pública en el mundo. Personas de todas las edades y condiciones se enfrentan a una mala nutrición, y como consecuencia hay un aumento en la tasa de diabetes y otras enfermedades relacionadas con el régimen alimentario. Según la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición llevada a cabo en 2012, más de 75% de la población tiene sobrepeso o son obesos. El peso de los niños también ha aumentado, en los últimos 30 años la obesidad se ha triplicado entre niños de edad escolar y adolescentes.

¿Sabías que los problemas nutricionales comienzan desde la niñez y continúan durante la vida adulta? La Organización Mundial de la Salud considera que la anemia es un problema nutricional presente en la adolescencia, cuya etapa es ideal para adquirir hábitos correctos en cuanto a la alimentación y a la actividad física.

En nuestro país, se busca erradicar el problema de salud alimentaria, por lo que distintas instancias están implementando programas, priorizando aquellos que buscan disminuir los altos índices de obesidad infantil.

Además del aumento de peso, otras señales de sobrepeso se manifiestan cuando necesitamos una talla más grande de ropa y cuando hay exceso de grasa en la cintura; una manera de indentificarlo es el Índice de Masa Corporal (IMC), la cantidad que se obtiene es un indicador aproximado de la grasa corporal y hace referencia al riesgo que se corre de sufrir enfermedades en tanto más nos alejemos de los límites adecuados al peso saludable. En niños y adolescentes, los valores toman en cuenta la edad y el sexo.

Organizados en equipos hagan la siguiente actividad.

1. Investiguen lo que significan el *sobrepeso* y la *obesidad.*

   Sobrepeso _______________________________

   Obesidad _______________________________

2. Investiguen, con el personal de la escuela, acerca de los programas que tengan relación con la salud alimentaria.

3. En la biblioteca de la escuela se encuentran las guías de estos cursos, consulten sobre el tema nutricional que más llame su atención y elaboren una investigación buscando más información en, por lo menos, otras dos fuentes.

4. Derivado de su investigación, hagan una encuesta que les permita saber el nivel de conocimiento que tiene la comunidad escolar respecto de este tema.

Algunas de las preguntas que pueden plantear son las siguientes:

a) ¿Conoces o has escuchado sobre el Plato del Buen Comer?
b) ¿Qué tipo de alimentos se recomienda comer a diario?
c) ¿Cuáles son los alimentos que deben evitarse?
d) ¿Sabes tu peso y estatura?
e) ¿Cómo consideras tu estado de salud: bueno, malo o regular?
f) ¿Practicas algún deporte?

5. Después de aplicar la encuesta, organicen en tablas los datos obtenidos para que puedan ser interpretados por todos.

6. Elaboren una presentación o carta mural con la información obtenida y agreguen un ejemplo de cómo ayudan las matemáticas a conocer y tratar este problema. Por ejemplo:

Coloquen cartulinas junto al periódico mural con las siguientes interrogantes:

a) ¿Sabes qué es el IMC?
b) ¿Cómo se calcula el IMC?

Para calcular el IMC se utiliza la siguiente la expresión algebraica:

Mujer de 14 años de edad
Peso: 48.6 kg
Estatura: 160 cm = 1.6 m

Paso 1:
$1.6 \times 1.6 = 2.56$

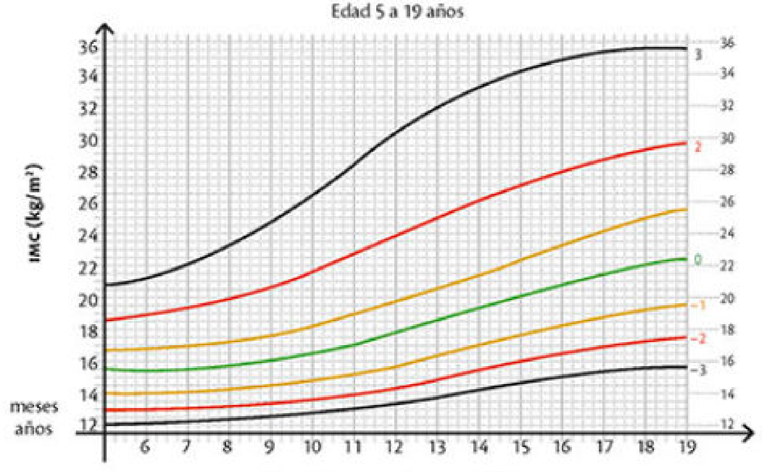
Paso 2:
$48.6 \div 2.56 = 18.98$

Paso 3:
IMC = 18.98

Expresión algebraica:

7. Actuando con respeto, inviten a la comunidad de estudiantes a calcular su IMC y ejemplifiquen el proceso.
8. Analicen y presenten la siguiente gráfica de IMC; escriban un texto que describa y sirva de guía para su comprensión.

IMC de Niños
Edad 5 a 19 años



Edad (Meses y años cumplidos)

9. Consigan los patrones internacionales de crecimiento infantil de la Organización Mundial de la Salud, que sirven de puntos de referencia para comparar el estado nutricional de los niños a escala nacional y regional, así como, entre distintos países y regiones.

La Organización Mundial de la Salud y asociados han creado un sistema de información sobre la situación general de la nutrición que contiene datos sobre indicadores clave relacionados con la nutrición y factores como los alimentos, salud y atención que se debe dar a estas medidas basadas en datos científicos que contribuyen a mejorar la salud nutricional, especialmente, entre las personas más vulnerables.

La existencia de comidas poco saludables y la inactividad aumentan con el tiempo los riesgos para la salud y contribuyen a que surjan enfermedades cardiovasculares, cáncer, diabetes y otros problemas.

10. De manera personal, lleva a cabo una autoevaluación acerca de tus hábitos nutricionales. Utiliza las siguientes preguntas como base y añade lo que consideres más relevante.

- ¿Qué tan cerca resultó mi IMC de la línea de salud que presenta la gráfica guía?
- ¿Qué tan bueno es mi régimen alimentario?
- ¿Cómo puedo mejorar mi régimen alimentario?
- ¿Cuántas calorías consumo diario?
- ¿Cuántas calorías gasto con mis actividades normales de un día?

BLOQUE 4

Ejes	Temas	Contenido	Sesiones
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	4.1. Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	4
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	4.2. Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	4
	Medida	4.3. Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	3
		4.4. Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	3
		4.5. Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	4
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	4.6. Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	5
	Análisis y representación de datos	4.7. Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	4

Para lograr los aprendizajes esperados planteados en este bloque, se sugiere la dosificación de contenidos en sesiones como se muestra en la tabla; además, se recomienda destinar dos sesiones para la aplicación y revisión de exámenes y cinco sesiones para el desarrollo y la presentación de la sección "Aplicaciones matemáticas".

APRENDIZAJES ESPERADOS

En este bloque, el estudiante aprenderá a:

- Utilizar en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resolver problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcular y explicar el significado del rango y la desviación media.

Competencias a desarrollar:

- **Resolver problemas de manera autónoma**
- **Comunicar información matemática**
- **Validar procedimientos y resultados**
- **Manejar técnicas eficientemente**

EJE **SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO**

TEMA **Patrones y ecuaciones**

Contenido

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Razono

Resuelve mediante cálculo mental.

a) $4(x-2) = 12$
b) $2(x^2+1) = 30$
c) $3(x+4) = 9$
d) $5x^2 = 20$
e) $3x^2 = 12x$

Escribe en tu cuaderno qué estrategias utilizaste para resolver estas ecuaciones, compáralas con las de tus compañeros y corrígelas o agrégales información si es necesario.

4.1. Expresión general cuadrática de una sucesión

LO QUE SÉ

Reúnanse en parejas y resuelvan lo que se plantea en cada caso.

1. Completen las siguientes tablas correspondientes a su respectiva sucesión de figuras.

a)

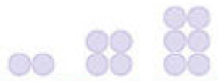


Figura	1	2	3	4	5	10	25	n
Número de bolitas	2	4						

b)

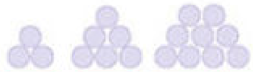


Figura	1	2	3	4	5	35	45	n
Número de bolitas	3		9					

c)

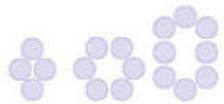


Figura	1	2	3	4	5	100	200	n
Número de bolitas				10				

d) Reúnanse con otras dos parejas y comparen sus procedimientos de los tres incisos anteriores. Con el resto del grupo, verifiquen las respuestas y corrijan lo que sea necesario.

2. A partir de la sucesión de números establezcan la sucesión de figuras y en su cuaderno elaboren una tabla con los diez primeros dígitos.

a) 4, 8, 12, 16, 20, ______, ______. Expresión general: ______________
b) 3, 5, 7, 9, 11, 13, ______, ______. Expresión general: ______________
c) 5, 7, 9, 11, 13, 15, ______, ______. Expresión general: ______________
d) Al terminar, revisen sus respuestas junto con el grupo y compartan sus procedimientos. Corrijan si fuera necesario.

3. Completen la siguiente tabla y después respondan lo que se indica.

n	$6 + 3(n-1)$	Resultado
4		
5		
10		
20		
30		
40		
50		
100		
150		
200		

a) ¿Cuál es la representación de la sucesión?

b) ¿De qué grado es la expresión general?

c) ¿Cómo sería la gráfica correspondiente a la sucesión?

d) Escriban tres expresiones de primer grado.

e) Reúnanse con otras dos parejas y comparen sus procedimientos en los tres puntos trabajados. Con el resto del grupo, verifiquen las respuestas y corrijan lo que sea necesario.

Usa las TIC

¿Te gusta jugar en internet? Entra a la página *Minijuegos* http://goo.gl/0Snkx practica y diviértete con el juego de las sucesiones. (consultado el 2 de diciembre de 2016).

CONSTRUYO

Organizados en equipos, resuelvan lo que se indica en cada planteamiento.

Actividad 1. Completen lo que se pide en la expresión general: $3n + 1$.

a) Para $n = 1$ se tiene: ______________
b) Para $n = 2$ se tiene: ______________
c) Para $n = 3$ se tiene: ______________
d) Para $n = 4$ se tiene: ______________

e) ¿Cuántos elementos deberá tener el elemento décimo de la sucesión? ________
f) ¿Cuál es la diferencia entre los términos? ________________________________
g) Comparen sus procedimientos. Con el resto del grupo, verifiquen las respuestas y corrijan lo que sea necesario.

Actividad 2. Completen lo que se pide en la expresión general: $2n^2 + 1$.

a) Para $n = 1$ se tiene: ________________________________
b) Para $n = 2$ se tiene: ________________________________
c) Para $n = 3$ se tiene: ________________________________
d) Para $n = 4$ se tiene: ________________________________
e) ¿Cuántos elementos deberá tener el elemento décimo de la sucesión? ________
f) ¿Cuál es la diferencia entre los cinco primeros términos? ________________
g) ¿Qué sucesión de números genera las diferencias entre los números? ________
h) ¿Cuál es la diferencia entre los términos de la sucesión de la pregunta anterior?
____

Comparen con otro equipo sus respuestas de las actividades 1 y 2 e intercambien argumentos. Consulten con su profesor en caso de tener dudas.

REFLEXIONA Y RESPONDE

¿Cómo podrías distinguir si a una sucesión le corresponde una expresión de primer grado o de segundo grado? Comenta tus ideas con el grupo.

Actividad 3. Sustituye la incognita con valores desde 1 hasta 5. Completa los cuadros con la diferencia entre los valores calculados de la ecuación. Observa el ejemplo y contesta las preguntas.

a) $2b + 2 =$ 4, $\boxed{6}$, 8, $\boxed{10}$, 2, $\boxed{14}$, 16, ...

Primera diferencia: 2 $\boxed{2}$ 2 $\boxed{2}$

Segunda diferencia: $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$

¿De qué grado es la sucesión? ____________

b) $2c^2 + 1 =$ 3, $\square$, 19, $\square$, 51, ...

Primera diferencia: 6 $\square$ $\square$ $\square$

Segunda diferencia: 4 $\square$ 4

¿De qué grado es la sucesión? ____________

c) $4x+1 =$ 5, $\square$, $\square$, $\square$, 21, ...

Primera diferencia: $\square$ $\square$ $\boxed{4}$ $\square$

Segunda diferencia: $\boxed{0}$ $\square$ $\square$

¿De qué grado es la sucesión? ____________

d) $f^2 + 2 =$ 3, $\square$, 11, $\square$, $\square$, 38, 51, ...

Primera diferencia: 3 $\square$ $\boxed{7}$ $\square$ $\boxed{11}$ $\boxed{13}$

Segunda diferencia: $\boxed{2}$ $\square$ $\boxed{2}$

¿De qué grado es la sucesión? ____________

e) Comparen las respuestas con el resto del grupo. Intercambien argumentos y establezcan una conclusión con respecto a lo que indica el valor de las diferencias.

PARA TENERLO PRESENTE

Las sucesiones cuyas primeras diferencias son iguales tienen una expresión algebraica de primer grado, por ejemplo: $2n$, $4n - 1$, etcétera.

Las sucesiones cuyas primeras diferencias no son iguales, pero la segunda diferencia sí lo es tienen una expresión algebraica de segundo grado, por ejemplo: $n^2 + 3$, $3n^2 + 2n$, etc.

Actividad 4. Observen las figuras y determinen cuántos elementos corresponden a cada una de las dos figuras que le dan continuidad.

a) ¿Cuántos elementos deberá tener la sexta figura? ________________
b) Considerando los elementos de las figuras, completen la tabla de la siguiente página.

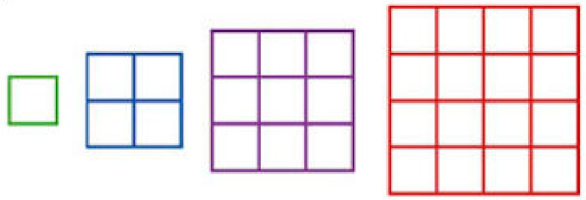


Figura	Unidades cuadradas
1	1
2	4
3	9
4	16
5	
6	
n	

d) Comparen sus respuestas con el resto del grupo. Argumenten sus procedimientos.

PARA TENERLO PRESENTE

Si en una sucesión las primeras diferencias no son iguales, pero las segundas sí lo son, entonces la expresión que le corresponde es de segundo grado y tiene la forma: $dn^2 + en + f$.

Actividad 5. Determinen la expresión general de las siguientes sucesiones.

a) 1, 4, 9, 16, 25, ________, ________. Expresión general: ________________

b) 2, 5, 10, 17, 26, ________, ________. Expresión general: ________________

c) 0, 3, 8, 15, 24, ________, ________. Expresión general: ________________

d) Comparen sus procedimientos y resultados con otro equipo y corrijan lo que sea necesario.

PARA TERMINAR

Enseguida, responde de manera individual lo que se solicita en cada caso.

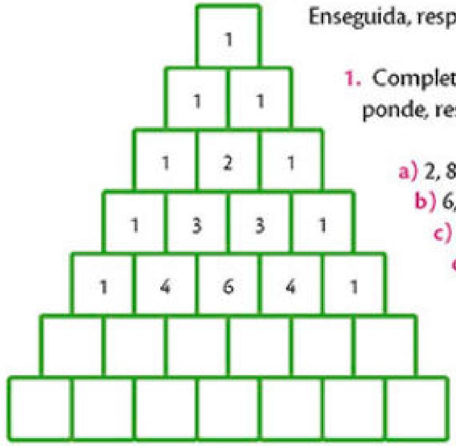
1. Completa las sucesiones y determina la expresión algebraica que les corresponde, respectivamente.

a) 2, 8, 18, 32, 50, ________, ________. Expresión general: ______

b) 6, 8, 12, 18, ________, ________. Expresión general: ______

c) 4, 7, 12, 19, 28, ________, ________. Expresión general: ______

d) 5, 7, 11, 17, 25, ________, ________. Expresión general: ______



2. A la izquierda hay un patrón triangular de números. Obsérvalo y contesta las preguntas de la siguiente página.

a) ¿Con qué número inicia y termina cada fila? ________________

b) Completa las casillas vacías de las dos últimas filas de la figura.

c) ¿Cuántos términos tendrá la octava fila? ________________

d) ¿Cuántos términos tendrá la decimoquinta fila? ________________

e) Observa que el término que sigue del 1 tiene relación con el número de orden de las filas, ¿cuál es el segundo término de la décima fila? ________________

f) ¿Cuál es el penúltimo término de la vigésima fila? ________________

g) Expresa el patrón que observaste en la figura anterior con un modelo algebraico: ________________

Investigo

Investiga cuál es la *sucesión de Farey* y su característica principal.

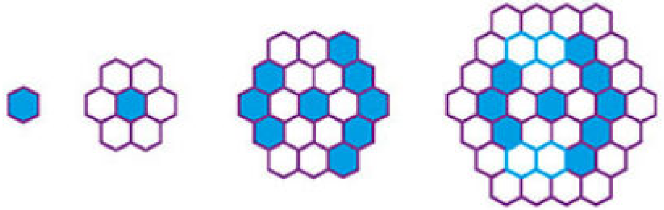
3. Ayer me enteré de que, por falta de aseo, cierto tipo de virus se transmite a través del saludo de manos. Por la noche asistí a una reunión, llegué en primer lugar, saludé al anfitrión y conté la cantidad de saludos de mano que nos fuimos dando: cuando solo estábamos 2 personas hubo 1 saludo; cuando ya éramos 3, conté 3 saludos; al ser 4, observé 6 saludos; al estar 5 personas en total conté 10 saludos.

a) ¿Cuántos saludos se dieron cuando éramos 12 personas? ________________

b) Expresa lo anterior con un modelo algebraico.

c) Explica tu modelo a tus compañeros, da tus argumentos y escucha los de los demás.

4. Observa la sucesión y responde lo que se solicita a continuación.



a) ¿Cuántos elementos deberá tener la quinta figura? ________________

b) Considerando los elementos de las figuras, completa la tabla.

Figura	Hexágonos base
1	1
2	7
3	19
4	37
5	
6	
n	

c) Revisen en grupo las respuestas de cada punto y comenten sus procedimientos. Con orientación de su profesor despejen las dudas que aún tengan.

Usa las TIC

¿Recuerdas las fracciones? En esta página encontrarás un juego en el que, a partir de la observación de una sucesión de figuras, se plantean preguntas relacionadas con fracciones. "Fracciones y sucesiones" http://goo.gl/J212rB (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Una sucesión se puede formar con números, colores y formas. Visita la página "Acertijos y más cosas" [en línea], y resuelve el acertijo sobre sucesión, http://goo.gl/vk4uF (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Contenido

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

4.2. Cuerpos de revolución

LO QUE SÉ

En parejas, contesten lo que se solicita en cada planteamiento.

1. Anoten cuatro objetos cuya forma se relacione con cuadriláteros.
   a) ______
   b) ______
   c) ______
   d) ______

2. Anoten cuatro objetos cuya forma se relacione con conos.
   a) ______
   b) ______
   c) ______
   d) ______

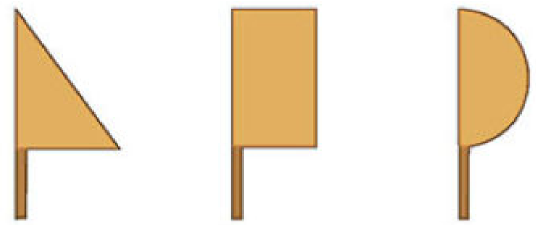
3. Anoten cuatro objetos cuya forma se relacione con cilindros.
   a) ______
   b) ______
   c) ______
   d) ______

Identifiquen en la revisión los ejemplos de objetos menos comunes e intercambien argumentos.

CONSTRUYO

Organizados en equipos, resuelvan lo que se indica en las actividades siguientes.

Actividad 1. Tracen en una cartulina un triángulo rectángulo, un rectángulo y un semicírculo. Peguen cada figura en palos para brocheta, popotes u otro material similar, como se muestra en la imagen de la siguiente página.



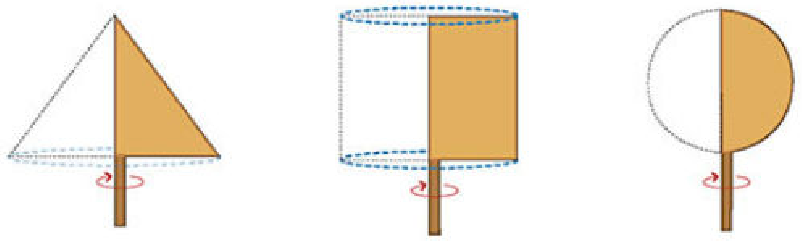
a) Escriban las medidas de cada figura plana que trazaron.

Del triángulo
Base: ______ Altura: ______ Perímetro: ______ Área: ______

Del rectángulo
Base: ______ Altura: ______ Perímetro: ______ Área: ______

Del semicírculo
Radio: ______ Diámetro: ______ Perímetro: ______ Área: ______

b) Giren las figuras, ¿qué observan? Anótenlo en el espacio debajo de cada figura.



______ ______ ______

Razono

Al preguntar a dos estudiantes acerca de la fórmula para calcular el perímetro de una semicircunferencia, uno de ellos dijo que era $\frac{\pi \times d}{2}$, el otro afirmó que era $\pi \times r$.
¿Quién tiene la razón? ¿Por qué?

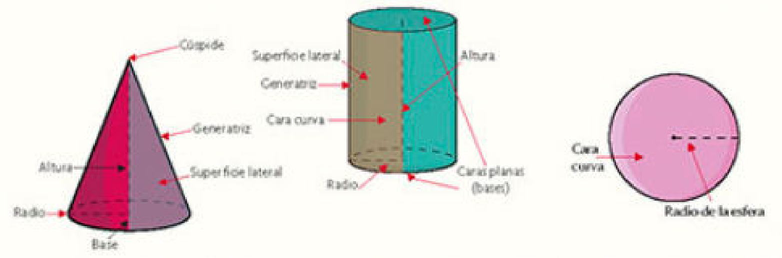
Comenten con el resto del grupo sus procedimientos y consulten sus dudas con el profesor.

PARA TENERLO PRESENTE

Al hacer girar sobre su eje a una figura plana se forma una figura con volumen, conocida como *cuerpo* o *sólido de revolución*. Los sólidos de revolución que se obtienen de girar un triángulo rectángulo, un rectángulo y un semicírculo alrededor de un eje son figuras comunes en la vida cotidiana; pensemos en un cono para tomar agua, o en una lata de conservas o en una pelota de futbol. Si conocemos el origen, seremos capaces de analizar sus características de una manera más fácil.

PARA TENERLO PRESENTE

Algunas de las partes de los cuerpos de revolución se muestran enseguida.



Actividad 2. Consigan un cono de papel para beber agua.

a) Tracen sobre una hoja un círculo que deberá servir de tapa para el cono de papel.
b) Midan la altura del cono y anoten su medida. ____________________
c) Corten longitudinalmente el cono desde la base hasta el vértice y extiéndanlo.
d) Peguen la figura plana del cono en su cuaderno.
e) Completen la siguiente tabla.

Partes del cono	Medidas
Radio	
Altura	
Generatriz	
Perímetro de la base	
Ángulo del sector circular	

Actividad 3. Consigan un cilindro de cartón como el que viene dentro del rollo papel higiénico.

Investigo

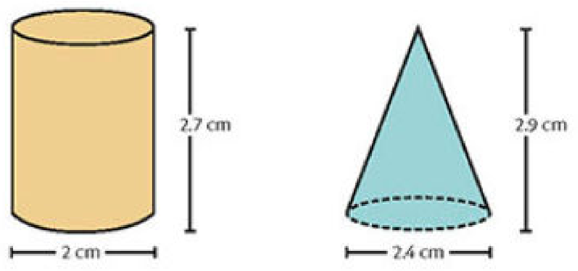
Investiga qué figura es un toroide y a partir de qué figura plana podemos obtenerlo.

a) Tracen sobre una hoja un círculo que deberá servir de tapa para el cilindro.
b) Midan la altura del cilindro y anoten su medida. ____________________
c) Corten longitudinalmente el cilindro desde la base hasta el otro extremo.
d) Peguen la figura plana del cilindro en su cuaderno.
e) Completen la siguiente tabla.

Partes de cilindro	Medidas
Radio de la base	
Altura	
Generatriz	
Área lateral	

Comparen con el resto del grupo las respuestas de las actividades 2 y 3. Comenten sus procedimientos y consulten sus dudas con el profesor.

Actividad 4. Observen los siguientes cuerpos de revolución.



a) Tracen la figura plana que los genera.

b) Calculen sus medidas y anótenlas. ____________________
c) Comparen sus resultados con el resto del grupo y comenten sus procedimientos.

Sabías que...

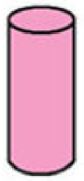
La Ruta de la Amistad es una muestra escultórica a la intemperie, quizá la más larga del mundo, y surgió con la idea de la Olimpiada cultural? Cada escultura se encuentra alejada de la otra a una distancia aproximada de 1 km. Esta muestra que se encuentra en la ciudad de México cuenta con 17 kilómetros de extensión y 19 esculturas elaboradas por artistas de diversos países. Busca en internet la escultura de José María Subirachs (España) que, sin duda, es una escultura fascinante por su composición geométrica: consiste de dos triángulos (superior e inferior) unidos por una barra horizontal, en la cual se muestran figuras geométricas bien definidas que sugieren la palabra *México*.

PARA TERMINAR

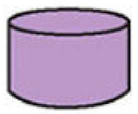
Resuelve de manera individual lo que se indica a continuación.

1. Traza el desarrollo plano de los siguientes cuerpos de revolución y escribe sus medidas correspondientes, incluidas las bases.

a)



b)



2. Si se quiere construir un filtro cónico cuya altura sea 8 cm y el radio de la base mida 5 cm, calcula el área de la cara curva que se forma con la generatriz.

a) Si el cono tuviera una tapa del mismo material, ¿qué área ocuparía? ________

b) Desarrolla un modelo algebraico que sirva para calcular las áreas correspondientes de cualquier cono.

c) ¿El mismo modelo servirá para determinar las medidas que deberá tener el desarrollo plano? ________

3. Traza el desarrollo plano de un cono cuya altura sea de 8 cm y su base mida 6 cm.

a) ¿Cuánto mide su generatriz? ________

b) ¿Cuántos grados tiene de amplitud dicho plano? ________

c) Comparen su trazo y medidas con las de su compañero más cercano. Compartan sus procedimientos.

d) Orientados por el profesor, establezcan sus conclusiones y anótenlas.

____

Contenido

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

4.3. La pendiente y el ángulo que se forma con el eje de las abscisas

LO QUE SÉ

Responde las actividades de manera individual.

1. A partir de las siguientes funciones lineales:

- $y = 0.5x + 1$
- $y = 7x + 4$
- $y = 4x$

a) Determina el valor de la pendiente.

b) Grafica las funciones anteriores en el siguiente espacio.

c) Verifica tus respuestas con tus compañeros y con ayuda de tu profesor.

En equipos, resuelvan lo que se solicita enseguida.

2. Cuando revisamos el tema del plano inclinado en la clase de Física el profesor preguntó: "¿Qué distancias puede alcanzar un plano de 20 cm de longitud, en línea vertical hacia la base y en línea horizontal hacia el eje perpendicular que pasa por el punto de soporte cuando se varía la altura?" Alberto y Lucía aún discuten si la variación de la distancia es proporcional a la variación del ángulo de inclinación. Completen la oración de abajo.

a) La variación de la distancia (sí/no) ________ es proporcional a la variación del ángulo de inclinación porque ________

Investigo

Investiga cómo se compensan las curvas cuando estas son muy cerradas. Existe un término que define la inclinación del camino y que nos da información acerca de la pendiente del mismo. Investiga de qué término se trata y cómo se calcula.

b) Completen la tabla siguiente. Pueden trazar la gráfica en una hoja milimétrica para obtener los valores faltantes.

Ángulo	Longitud del plano	Distancia del punto de contacto a la base	Distancia del punto de contacto al eje vertical
30°	20 cm	10 cm	
45°	20 cm	14.1 cm	14.1 cm
60°	20 cm		10 cm
0°	20 cm		

c) ¿Qué relación observan entre las distancias y los ángulos? Expliquen.

____

d) ¿Cuáles serían las distancias si el plano midiera 10 cm? __________. Establezcan una conclusión a partir de los resultados y anótenla en su cuaderno.

e) Al terminar, comenten sus respuestas y procedimientos con todo el grupo.

CONSTRUYO

En equipos, resuelvan lo que se solicita enseguida.

Actividad 1. Miguel y José deben colocar una escalera de 3 m de longitud en un muro; la colocan con diversas inclinaciones.

a) Completen la tabla para encontrar con qué ángulo de inclinación se alcanza una mayor altura.

Ángulo	Longitud de la escalera	Distancia al muro	Altura alcanzada
30°	3 m	2.6 m	1.5 m
45°	3 m	2.1 m	
	3 m	1.5 m	
0°	3 m	3 m	

b) Comparen sus resultados con los de los otros compañeros. Argumenten su respuesta y consulten sus dudas con el profesor.

Actividad 2. Tracen en el siguiente espacio y por separado tres ángulos: de 30°, de 45° y de 60°.

a) Formen con cada uno un triángulo rectángulo con las medidas que elijan y completen la siguiente tabla.

Ángulo	Cateto adyacente al ángulo	Cateto opuesto al ángulo	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	Razón, expresada con dos cifras decimales
30°				
45°				
60°				

b) Escriban la relación entre los catetos que trazaron y la razón resultante de cada ángulo.

____

c) Comparen los resultados de las razones utilizadas en las dos últimas actividades. ¿Cómo son las razones para un ángulo específico según el tamaño del triángulo rectángulo? Argumenten su respuesta.

____

____

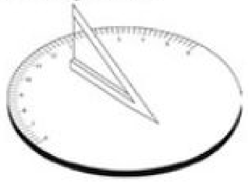
d) Establezcan, de manera grupal, una conclusión que refleje la relación entre la pendiente o ángulo de inclinación y la razón correspondiente.

PARA TENERLO PRESENTE

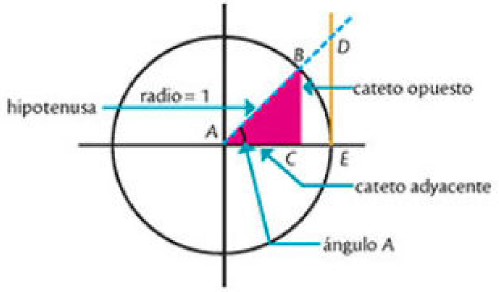
El coeficiente de x en la expresión de una función lineal, la cual tiene como gráfica una recta, se relaciona con el cociente de la longitud del cateto vertical entre la longitud del cateto horizontal.

¿Sabías que...

Un *gnomon* es un objeto alargado que sirve para medir el tiempo con la proyección de su sombra sobre una superficie horizontal? ¿Qué forma tiene el gnomon?



Actividad 3. Comprueben que al hacer coincidir un triángulo rectángulo *ABC* en un círculo de radio 1 se encuentra lo siguiente:



a) El triángulo *ABC* es semejante al *ADE*. Argumenten por qué. ______________________________

b) La razón $\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$ del ángulo *A* del triángulo *ABC* es la misma que la razón $\frac{DE}{AE}$. Argumenten por qué. ______________________________

____

Aplicación

Cuando se diseñan y construyen carreteras es importante tomar en cuenta la inclinación del camino, ya que una pendiente muy pronunciada –sea positiva o negativa– podría ocasionar que la velocidad de un automóvil cambie drásticamente en un intervalo corto y provocar que el conductor pierda el control.

c) Como el radio mide una unidad, entonces, la razón $\frac{DE}{AE} = DE$. Argumenten por qué. ______

d) Como DE es tangente al círculo, podemos nombrar a la razón $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ tangente del ángulo A. Argumenten por qué. ______

______

PARA TERMINAR

Contesta las siguientes preguntas de manera individual.

1. Lee los siguientes problemas y contesta las preguntas.

   a) ¿Cómo calcularías la altura de un edificio si a cierta hora del día el ángulo que forma el extremo de su sombra con la parte más alta mide 45°?
   b) Un poste está sostenido a un tirante, con una separación de 30 m, ¿cuál es la altura del poste y la longitud del tirante, si el ángulo que se forma entre la separación y el tirante es de 30°?

2. Calcula en tu cuaderno las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo del que se sabe que la tangente $A = 1.6$ ______

   a) Explica cómo se calcula la medida de su hipotenusa.

   ______

   ______

3. Identifica la medida del ángulo agudo A de un triángulo rectángulo del que se sabe que:

   a) $\tan B = 0.0875$ $\measuredangle B =$ ______
   b) $\tan B = 0.2679$ $\measuredangle B =$ ______
   c) $\tan B = 0.4663$ $\measuredangle B =$ ______
   d) $\tan B = 0.7813$ $\measuredangle B =$ ______
   e) $\tan B = 2.050$ $\measuredangle B =$ ______
   f) $\tan B = 2.145$ $\measuredangle B =$ ______
   g) $\tan B = 2.475$ $\measuredangle B =$ ______
   h) $\tan B = 11.43$ $\measuredangle B =$ ______

Compara tus resultados con los del resto del grupo.

¿Sabías que...

La trigonometría es la parte de las matemáticas que se encarga de estudiar las relaciones entre las medidas de los ángulos de un triángulo y las medidas de sus lados.

REFLEXIONA Y RESPONDE

Traza en tu cuaderno dos triángulos rectángulos semejantes. Elige un ángulo de referencia, el mismo para ambos, mide los catetos correspondientes y calcula, en los dos triángulos rectángulos, la razón que hemos estudiado.
¿Coinciden los valores? Argumenta: ______

______

______

4.4. Relaciones entre los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y las razones de los lados que desde él se forman

Contenido

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

LO QUE SÉ

Organizados en equipo, resuelvan lo que se solicita.

1. La siguiente tabla muestra las medidas de los lados de cuatro triángulos.

	Triángulo A	Triángulo B	Triángulo C	Triángulo D
Medida del lado 1	7	6	13	9
Medida del lado 2	7	8	5	3
Medida del lado 3	7	10	11	10

   a) ¿Cuál o cuáles de ellos son triángulos rectángulos?
   ______
   b) ¿Qué características comunes tienen los triángulos rectángulos?
   ______
   d) Comenten su respuesta con el grupo y argumenten sus razonamientos

CONSTRUYO

Organizados en equipo, resuelvan las siguientes situaciones.

Actividad 1. En su cuaderno, tracen un triángulo rectángulo cuyos lados midan 6 cm, 8 cm y 10 cm, respectivamente.

   a) Consideren el menor ángulo agudo (A) como referencia, mídanlo con el transportador y calculen las razones hasta diez milésimos.
   Ángulo A: ______

$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} =$ ______ $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} =$ ______

Recuerda que...

En un triángulo rectángulo, a medida que crece su ángulo agudo, su altura también aumenta.

Aplicación

Los arquitectos y los ingenieros que diseñan y construyen edificios deben considerar no solo la estética de la construcción, sino la funcionalidad y la seguridad. Si colocan rampas muy inclinadas o ventanas casi horizontales pueden provocar accidentes. Por lo tanto, deben tener en cuenta siempre la relación entre los catetos y la hipotenusa.

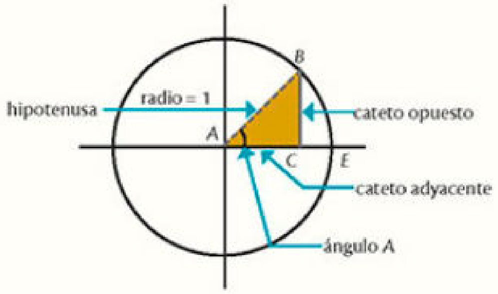
$\dfrac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Hipotenusa}} =$ ____________ $\dfrac{\textit{Hipotenusa}}{\textit{Cateto opuesto}} =$ ____________

$\dfrac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Cateto opuesto}} =$ ____________ $\dfrac{\textit{Hipotenusa}}{\textit{Cateto adyacente}} =$ ____________

b) Analicen los resultados obtenidos de cada razón calculada y comenten en el grupo.

PARA TENERLO PRESENTE

El hueco que se forma entre el cateto opuesto al ángulo *A* y el arco correspondiente recibe el nombre de *seno*. Su altura depende del ángulo agudo y de la medida de la hipotenusa que lo forman.



b) Identifiquen los valores correspondientes al ángulo *A* de referencia en la tabla de valores trigonométricos que se encuentra en el anexo del libro o en una calculadora científica.

sen *A* = ____________________

tan *A* = ____________________

c) Anoten las coincidencias o diferencias entre los valores obtenidos en las razones y los encontrados con la calculadora o en la tabla.

____

d) Establezcan una conclusión que justifique el hecho matemático observado anteriormente. Coméntenla con el grupo y anótenla.

____

____

Actividad 2. Dibujen un triángulo rectángulo cualquiera y dentro de él otro triángulo semejante.

a) Elijan el mismo ángulo (*B*) de referencia en ambos triángulos, midan los lados de ambos triángulos y encuentren las razones que se piden en la tabla.

Razón		Triángulo 1	Triángulo 2
sen *B*	$\dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Hipotenusa}}$		
tan *B*	$\dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}}$		

b) ¿Cómo es el resultado de la razón seno en los dos triángulos con respecto a los de la tangente? Expliquen. ____________________

c) Con una calculadora científica determinen el seno y el coseno de los cocientes obtenidos. ¿Los resultados coinciden con la medida del ángulo *B*? __________

d) Comparen sus respuestas con otro equipo y comenten sus procedimientos. Corrijan lo que sea necesario.

Actividad 3. Tracen dos triángulos rectángulos cualesquiera que cumplan con la condición de que uno de sus ángulos agudos sea de 60°, midan sus lados y encuentren las razones respecto a este ángulo.

a) Completen la siguiente tabla.

Razón		Triángulo 1	Triángulo 2
sen 60°	$\dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$		
tan 60°	$\dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}}$		

b) Establezcan una conclusión de este hecho matemático, escríbanla y coméntenla con el grupo.

____

____

____

Razono

Calcula en tu cuaderno el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo del que se sabe que el cateto opuesto al ángulo agudo *A* mide 5 unidades. Al terminar, escribe tu proceso de solución. Cuando estudies para tu próximo examen te será útil.

REFLEXIONA Y RESPONDE

Con base en las reflexiones efectuadas en las actividades anteriores, responde: ¿Qué es la razón trigonométrica *seno* de un ángulo?

____

____

¿Qué es la razón trigonométrica *tangente* de un ángulo?

____

____

Actividad 4. Escriban el valor seno de los ángulos que se indican a continuación. Consulten la tabla de valores trigonométricos del anexo colocado al final del libro o utilicen una calculadora científica.

a) sen 60° = ________ b) sen 45° = ________ c) sen 80° = ________

PARA TERMINAR

Resuelve de manera individual lo que se solicita enseguida.

1. Utilizando las tablas trigonométricas del anexo colocado al final del libro, o una calculadora científica, identifica el ángulo *A* al que corresponden las medidas dadas a continuación.

   a) sen A = 0.2250 A = ________
   b) sen A = 0.3007 A = ________
   c) sen A = 0.5100 A = ________
   d) sen A = 0.6670 A = ________
   e) sen A = 0.9990 A = ________

2. Elige dos triángulos del punto anterior y trázalos en el siguiente espacio; para cada uno identifica el valor de sus ángulos.

3. Contesta:

   a) Si el seno de un ángulo de 30° es igual a 0.5, ¿a qué es igual el coseno de un ángulo de 60°? ________________
   b) ¿A qué es igual el producto de la tangente de un ángulo de 30° por la tangente de un ángulo de 60°? ________________

Guiados por el profesor, revisen las respuestas de cada punto. Comenten sus procedimientos y argumenten su razonamiento. Corrijan lo que sea necesario.

4. Plantea un problema para resolverse utilizando lo que aprendiste en esta lección.

   a) Escríbelo en tu cuaderno.
   b) Intercambia tu problema con un compañero y resuelve el de él.
   c) Verifiquen sus razonamientos, procedimientos y resultados con ayuda de su profesor.

Investigo

Investiga qué ocurrió entre los pitagóricos cuando plantearon un triángulo rectángulo cuyos catetos medían una unidad. ¿Qué valor se obtiene para la hipotenusa?, ¿qué tiene de especial dicho valor?

Aplicación

La trigonometría se utiliza en los sistemas de satélite, la astronomía, aviación, ingeniería, topografía, geografía y muchos otros campos. Por ejemplo, en arquitectura es fundamental para curvar las superficies de los materiales de construcción, como el acero y el vidrio, se utiliza para encontrar las alturas de los edificios, crear objetos tridimensionales y hacer las demarcaciones de cubículos en un edificio de oficinas. Asimismo, resulta útil en el diseño de un edificio para predeterminar los patrones geométricos y la cantidad de material y medidas precisas para un proyecto.

Contenido

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

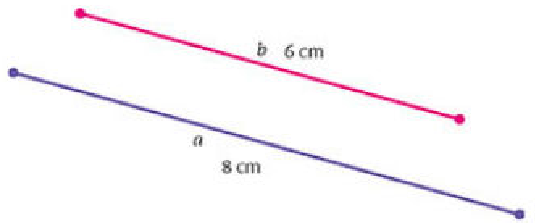
4.5. Razones trigonométricas seno, coseno y tangente

LO QUE SÉ

Organizados en equipo, resuelvan la siguiente situación.

1. Se quiere trazar un triángulo rectángulo considerando los segmentos: *a* de 8 cm y *b* de 6 cm, tales que el segmento *a* sea opuesto al ángulo recto.

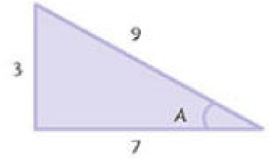
   a) Dibújenlo en su cuaderno.
   b) Calculen el perímetro del triángulo. Perímetro = ________________



   c) Describan su procedimiento para llegar al resultado y coméntenlo con el grupo.

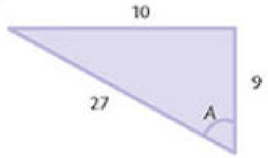
2. Determina las razones trigonométricas de los siguientes triángulos

a)



$\dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}} =$ ________________

b)



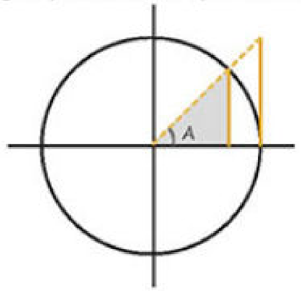
$\dfrac{\textit{Cateto opuesto}}{\textit{Cateto adyacente}} =$ ________________

Revisen entre todo el grupo las respuestas e intercambien comentarios relativos a su procedimiento de resolución.

CONSTRUYO

Organizados en equipos, resuelvan lo siguiente.

Actividad 1. Observen la figura y contesten lo que se solicita enseguida.



a) ¿Cómo se comporta el cateto opuesto cuando la hipotenusa se mueve de lugar sobre el plano? ______

b) Mientras el ángulo aumenta, ¿el valor del cateto opuesto se acerca a la hipotenusa? Expliquen. ______

c) Cuando el ángulo rebasa los 90°, ¿este disminuye nuevamente? ______

______

d) ¿El seno del ángulo *A* es igual a *y*? Justifiquen su respuesta. ______

______

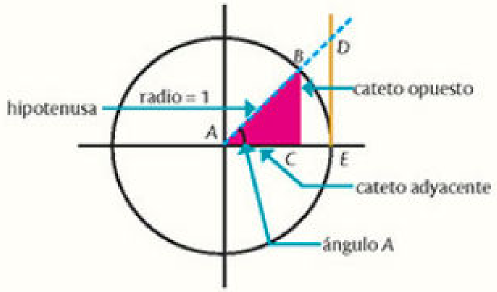
e) ¿El coseno del ángulo *A* es igual a *x*? Justifiquen su respuesta. ______

______

f) Comparen sus respuestas con otros equipos y comenten sus argumentos. Consulten a su profesor las dudas que tengan.

PARA TENERLO PRESENTE

Dado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa coincide con el centro y un punto de un círculo de radio 1, encontramos que a la medida del cateto opuesto al ángulo central le corresponde el valor del seno del ángulo; a la medida del complemento del ángulo seno se le llama *coseno* y le corresponde entonces la razón $\frac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Hipotenusa}}$.



Actividad 2. Tracen en una hoja milimétrica un plano cartesiano y un círculo de radio de 10 cm, cuyo centro coincida con el origen del plano cartesiano, y tracen en él un triángulo rectángulo cuyo ángulo agudo *A* mida 30°.

a) Midan los lados del triángulo y calculen la razón $\frac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Hipotenusa}}$ = ______

b) ¿Coincide el valor de la razón con el coseno de 30° que se presenta en las tablas trigonométricas del anexo o en una calculadora científica? Expliquen.

______

c) Tracen en el mismo círculo un triángulo rectángulo con un ángulo de 80°, midan sus lados y calculen la razón $\frac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{Hipotenusa}}$ = ______

d) ¿Coincide también el valor de la razón con los valores de las tablas trigonométricas o de la calculadora científica? Expliquen.

______

Comparen sus respuestas con otro equipo e intercambien comentarios acerca de sus procedimientos.

Actividad 3. Escriban el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 20° = ______
cos 70° = ______

b) sen 16° = ______
cos 74° = ______

c) sen 42° = ______
cos 48° = ______

d) sen 53° = ______
cos 37° = ______

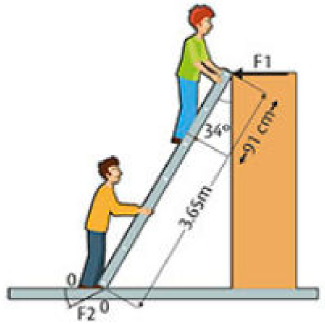
e) sen 90° = ______
cos 0° = ______

f) Expliquen qué tienen en común los ángulos. ______

______

Comparen sus resultados con otro equipo y comenten sus procedimientos. Corrijan lo que sea necesario y consulten sus dudas con el profesor.

Actividad 4. Observen la figura de la derecha y contesten.



a) ¿Con qué razón trigonométrica se puede calcular la altura que alcanza la escalera sobre el muro?

______

b) Calculen dicha altura.

c) Escriban un procedimiento con el que se puede calcular la altura a la que llega una persona que sube la escalera si su estatura es de 170 centímetros.

Compartan su respuesta con otros equipos, mostrando los argumentos matemáticos.

REFLEXIONA Y RESPONDE

¿Coinciden en cada inciso de esta actividad los valores de seno y coseno? ¿Por qué?

Actividad 5. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Si la altura de un triángulo equilátero mide 10 cm, ¿cuánto miden sus lados?

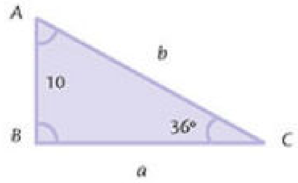
b) Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide 20 cm. Calculen su altura.

PARA TERMINAR

Resuelve de manera individual lo siguiente.

1. Calcula los valores que se piden para cada uno de los triángulos. Usa la calculadora o consulta la tabla de razones trigonométricas ubicada en el anexo al final del libro.

a)

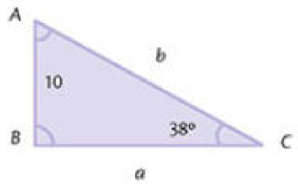


a = ______________

b = ______________

A = ______________

b)



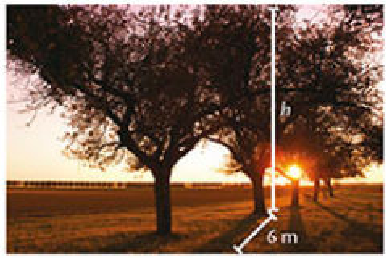
a = ______________

b = ______________

A = ______________

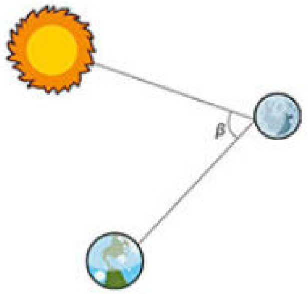
2. Resuelve los siguientes planteamientos.

a) Un árbol proyecta una sombra de 6 m en el momento en que los rayos del Sol forman con el horizonte un ángulo de 45°. Calcula la altura del árbol y anota aquí el procedimiento y resultado.



b) Calcula en tu cuaderno la longitud de tu sombra en el momento en el que los rayos del Sol forman con el horizonte un ángulo de 60°, suponiendo que tu estatura es de 1.70 m. Anota aquí tu procedimiento y resultado.

3. El área iluminada de la luna se define por la expresión $A = \frac{\pi r^2}{2}(1 + \cos \beta)$. Si el radio de la luna es de 1080 millas, ¿cuánto mide el ángulo que permite mayor iluminación. Resuelve el problema y comparte tus procedimientos y respuesta con tus compañeros.



Aplicación

¿Para qué sirve la trigonometría?
Con la suficiente información para definir un triángulo, la trigonometría permite calcular el resto de las dimensiones y de ángulos. Si dos piezas de información se dan, luego una tercera pieza desconocida se puede calcular. Por ejemplo, si se quiere saber qué altura desea alcanzar una grúa para llegar a la cima de un edificio o qué tan alto debe abrir un puente levadizo para permitir el paso de las embarcaciones.

Investigo

¿Cuándo se deben usar las razones seno, coseno o tangente? Organizados en equipos, investiguen cómo se construye un hipsómetro o un goniómetro. Elijan un poste o un árbol y calculen la altura.
Elaboren una bitácora que muestre las razones y el procedimiento que siguieron para llevar a cabo el trabajo.

Usa las TIC

Si lo requieren, pueden consultar las páginas "Construcción y aplicaciones de un goniómetro" http://goo.gl/igCBdA (consultado el 2 de diciembre de 2016) y "Cómo hacer un hipsómetro en casa", http://goo.gl/acS5e (consultado el 2 de diciembre de 2016).

Contenido

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

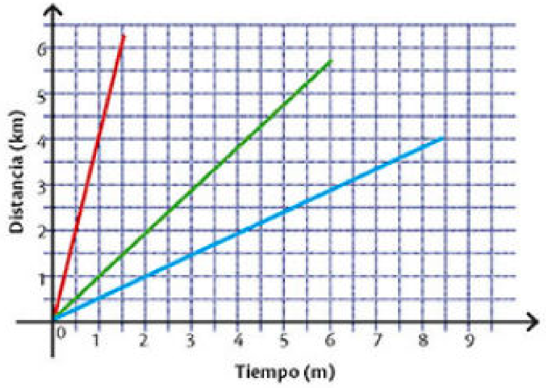
4.6. Razón de una función lineal e inclinación

LO QUE SÉ

Reúnanse en parejas para resolver lo siguiente.

1. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida y el tiempo que emplearon tres participantes que compitieron en una carrera de motocicletas. Cada participante está señalado con un color diferente. Sabemos que en una carrera tradicional, quien recorre la distancia entre la salida y la meta en el menor tiempo posible es el ganador.

Analicen la gráfica y calculen lo que se pide enseguida.



a) ¿Quién recorrió mayor distancia en el primer minuto?

____

b) ¿Quién de los tres competidores llegó en primer lugar? ______________

En la gráfica se puede observar que el competidor rojo recorrió 4 km; el competidor verde, 1 km y el azul, solo 500 metros.

c) Calculen ahora la velocidad de cada competidor a lo largo de la carrera.

Recuerden que la velocidad se expresa como la relación de un objeto que recorre distancias iguales en tiempos iguales. Para el caso de los motociclistas de la gráfica, usamos la expresión algebraica $v = \frac{d}{t}$.

Para el competidor representado en rojo tenemos que:

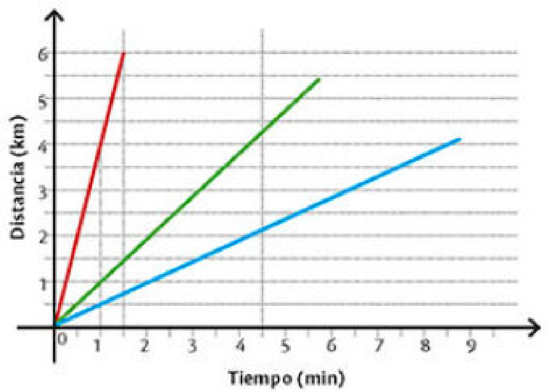
$$v_{rojo} = 4\ \frac{km}{min}$$

Para el competidor representado en verde:

$$v_{verde} = 1\ \frac{km}{min}$$

Y para el competidor representado en azul:

$$v_{azul} = 0.5\ \frac{km}{min}$$



Completen la tabla.

Competidor	Velocidad (km/min)
Rojo	
Verde	
Azul	

2. Con base en las gráficas anteriores, contesten lo siguiente.

a) ¿Cuánto tiempo tardó cada competidor en llegar a la meta considerando que el inicio estaba a 6 km?

____

b) ¿Qué relación hay entre la pendiente de la recta y la velocidad de cada competidor?

____

c) ¿Cómo se calcula la pendiente de una recta?

____

d) Calculen la pendiente que corresponde a la recta que representa a cada competidor.

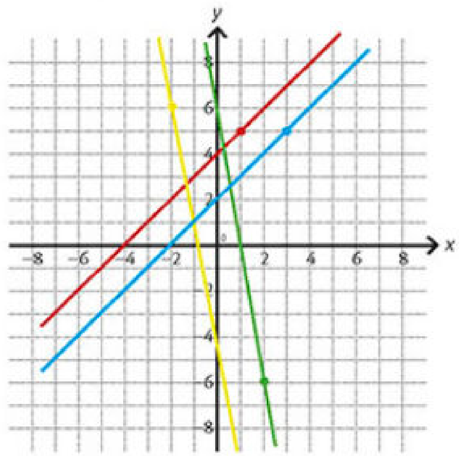
____

e) Comenten en el grupo acerca de los procedimientos que emplearon. Consulten con su profesor las dudas que tengan.

CONSTRUYO

Reúnanse en equipos para resolver las siguientes actividades.

Actividad 1. Con base en la siguiente gráfica, completen las tablas de datos que corresponden a cada color de línea.



Roja	
x	y

Amarilla	
x	y

Verde	
x	y

Azul	
x	y

a) Escriban las expresiones algebraicas de cada una de las rectas.
Roja: ____________________
Amarilla: ____________________
Verde: ____________________
Azul: ____________________

b) Expliquen qué relación existe entre las rectas amarilla y verde. ____________________

c) Expliquen qué relación existe entre las rectas roja y azul. ____________________

d) ¿Qué tienen en común las funciones de las rectas azul y roja? Justifiquen su respuesta. ____________________

e) Expliquen qué tienen en común las funciones algebraicas de las rectas azul y roja. ____________________

f) Expliquen qué tienen en común las expresiones algebraicas de las rectas verde y amarilla. ____________________

g) Grafiquen en el plano cartesiano una recta que sea paralela a la recta azul y a la roja ¿Cuál es la expresión algebraica que representa a esa recta? ____________________

h) Comparen sus respuestas con otro equipo. Argumenten sus procedimientos. Consulten a su profesor en caso de tener dudas.

Actividad 2. En las carreteras, además de las señales que marcan la velocidad máxima permitida y otras indicaciones, hay unas señales que indican que en algún tramo próximo del camino hay una pendiente o una inclinación de la carretera. Pero, ¿qué significa el dato que aparece con ellas?

Estas señales carreteras se utilizan para advertir de la presencia de una subida o bajada considerable –una pendiente muy pronunciada–, se colocan a la orilla del camino e indican el grado de inclinación. Dicho de otra forma, la pendiente indica la inclinación.

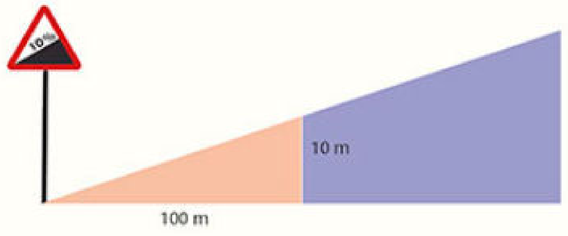
a) ¿Qué unidades tiene la pendiente? ____________________
b) ¿A qué se refiere una pendiente del 10%? ____________________
c) Comenten entre todo el grupo. Intercambien argumentos y definan las respuestas correspondientes.

Aplicación

La *planimetría* estudia los instrumentos y métodos para proyectar –sobre una superficie plana horizontal– la exacta posición de los puntos más importantes del terreno y construir de esa manera una figura similar al mismo; también muestra si se encuentra en el terreno una pendiente y qué tan uniforme. Sin un buen plano, los ingenieros no podrían proyectar debidamente un edificio o trazar un fraccionamiento, tampoco podrían señalar una pendiente determinada como se requiere, por ejemplo, en un alcantarillado.

PARA TENERLO PRESENTE

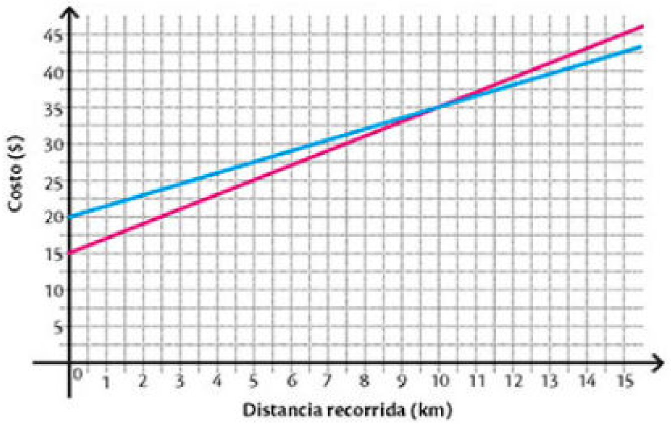
La *pendiente* es una cantidad *adimensional*, es decir, que no tiene unidades y solo hace referencia a la inclinación. Por ejemplo, en el caso de las señales de las carreteras, una pendiente de 10% quiere decir que por cada 100 m de avance horizontal, la altura de la carretera cambiará en 10 m, como se puede ver en la siguiente imagen.



Actividad 3. Enseguida se detallan las tarifas de dos sitios de taxis de una colonia: el sitio Mextaxi cobra \$15.00 por el banderazo y \$2.00 por cada kilómetro recorrido. El sitio Taxi Radio cobra \$20.00 al arranque y \$1.50 por cada kilómetro recorrido.

a) ¿Cuál sitio ofrece la mejor tarifa para un recorrido de 15 km? Expliquen. ____________________

En la siguiente gráfica se muestra la tarifa de cada sitio.



b) ¿Qué color corresponde a cada sitio de taxis? Expliquen. ______________________

____

c) Determinen la función que representa el costo del servicio de cada sitio de taxis.
Mextaxi: ______________________________________
TaxiRadio: ____________________________________

d) ¿Existe alguna distancia en la que los costos del servicio de cada sitio sean iguales? Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

e) En las siguientes tablas, anoten los datos que corresponden a cada una de las rectas graficadas.

Sitio Mextaxi	
Distancia (km)	Costo ($)

Sitio TaxiRadio	
Distancia (km)	Costo ($)

f) De acuerdo con las tablas, ¿cuál es la variación entre los kilómetros recorridos y el costo del viaje en el sitio Mextaxi? Argumenten su respuesta.

____

____

g) ¿Cuál es la variación entre los kilómetros recorridos y el costo del viaje en el sitio TaxiRadio? Argumenten su respuesta. ______________________

____

h) Revisen las respuestas con otro equipo y comparen sus procedimientos. Argumenten su razonamiento y consulten con su profesor las dudas que surjan. Corrijan lo que sea necesario.

PARA TENERLO PRESENTE

En el caso de funciones cuyas gráficas corresponden a líneas rectas, la pendiente m es igual a la razón de cambio de los valores de la ordenada con respecto a los de la abscisa.

$$m = \frac{y}{x}$$

Lo que quiere decir que a partir de dos puntos de coordenadas y sus respectivas parejas ordenadas (x, y), obtenidas a partir de la gráfica o de la tabla de valores, se calcula el cociente de las diferencias.

Por ejemplo, en la gráfica se consideran dos puntos de coordenadas $A = (0, 2)$ y $B = (3, 5)$.

$$m = \frac{5 - 2}{3 - 0} = 1$$

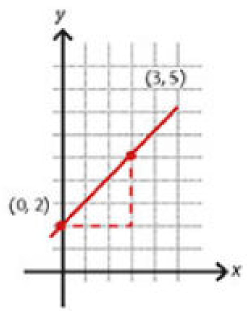
Calculando la pendiente tenemos que la pendiente resultó ser $m = 1$ y en la gráfica podemos ver que la ordenada es $b = 2$.

Actividad 4. En la actividad anterior la ordenada al origen b está determinada por el costo del banderazo. Analiza la gráfica de la derecha y contesta las preguntas.

a) ¿A qué corresponde la variable m? ______________________
b) ¿Cómo resulta la función de la recta mostrada en la gráfica? Expliquen.

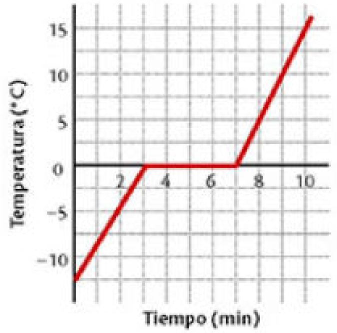
____

____



c) Revisen entre todo el grupo sus respuestas. Intercambien argumentos relacionados con sus procedimientos. Consulten con su profesor cualquier duda que tengan.

Actividad 5. En un laboratorio se calibró un termómetro de mercurio mediante un experimento sencillo: se colocó un trozo de hielo en un vaso de precipitados y un poco de agua a la cual añadieron sal para disminuir aún más la temperatura de la mezcla. Colocaron, además, un termómetro digital para poder tener una referencia y comparar cómo cambió la temperatura durante 10 minutos. Comenzaron a tomar el tiempo y los resultados se presentaron en la siguiente gráfica:



a) ¿Cuánto mide la pendiente de la recta en el intervalo de tiempo desde cero hasta 3 min?

____

b) ¿Cuánto mide la pendiente de la recta en el intervalo de tiempo desde 3 min hasta 7 min?

____

c) ¿Cuánto mide la pendiente de la recta en el intervalo de tiempo desde 7 min hasta 10 min?

____

d) ¿Cuánto varía la temperatura por minuto a partir de que se comienza el experimento hasta que llega a 0 °C? Justifiquen su respuesta.

____

e) ¿En qué intervalo no hubo cambios en la temperatura? Argumenten su respuesta.

____

f) De acuerdo con lo visto en lecciones anteriores, si la expresión algebraica o función que representa al último tramo de la recta es $y = 5x + 15$, ¿cuál es la función para el primer intervalo? Expliquen su respuesta. ______________________________

g) Comparen sus respuestas con otro equipo e intecambien comentarios y argumentos relativos a los procedimientos que aplicaron. En caso de ser necesario, corrijan. Consulten las dudas que tengan con su profesor.

PARA TENERLO PRESENTE

Cuando analizamos fenómenos en los que calculamos la variación respecto de una magnitud cualquiera, se dice que estamos calculando una *razón de cambio*, la cual puede representarse en un plano cartesiano.

Actividad 6. Con base en la información anterior, responde las preguntas.

a) Identifica la razón de cambio en la actividad de las motcicletas de la sección "Lo que sé". Anótala enseguida. ______________________________
b) ¿Cuál es la característica común de las gráficas de las actividades anteriores con respecto a la razón de cambio? Explica tu respuesta. ______________________________
c) ¿Qué indica una gráfica que no tiene aumentos ni variaciones? ¿Hay una razón de cambio en ella? Explica tu respuesta. ______________________________
d) Comenten en grupo las respuestas a las preguntas anteriores. Escuchen las opiniones y entre todos redacten una conclusión.

PARA TERMINAR

Resuelve de manera indivual lo que se solicita a continuación.

1. En una fábrica de pinturas se adquirió una nueva maquinaria para el llenado de botes y latas, pero antes de utilizar la máquina debía probarse y calibrarse. Para ello, se colocó una cubeta vacía con capacidad de 20 litros en la manguera de llenado de la pintura y al encenderla la máquina vertió en la cubeta 4 litros de pintura en un minuto. Como necesitan más velocidad de llenado en la máquina, hacen unos ajustes y colocan una cubeta de la misma capacidad, pero que contiene 7 litros de pintura. Ahora, la máquina llena con un flujo de 6 litros por minuto.

   a) ¿En cuánto tiempo se llenará una cubeta vacía? Argumenten su respuesta. ______________________________

   b) ¿En cuánto tiempo se llenará la cubeta que ya tiene 4 litros de pintura? Argumenten su respuesta. ______________________________

   c) ¿En cuánto tiempo se llenará la cubeta que ya tiene 7 litros de pintura? Argumenten su respuesta. ______________________________

   d) ¿Qué función representa el llenado de cubetas en cada caso? Argumenten su respuesta. ______________________________

   e) Completen las tablas, anotando los valores que corresponden a cada cubeta.

Cubeta vacía	
Abscisas	Ordenadas

Cubeta con 4 litros	
Abscisas	Ordenadas

Cubeta con 7 litros	
Abscisas	Ordenadas

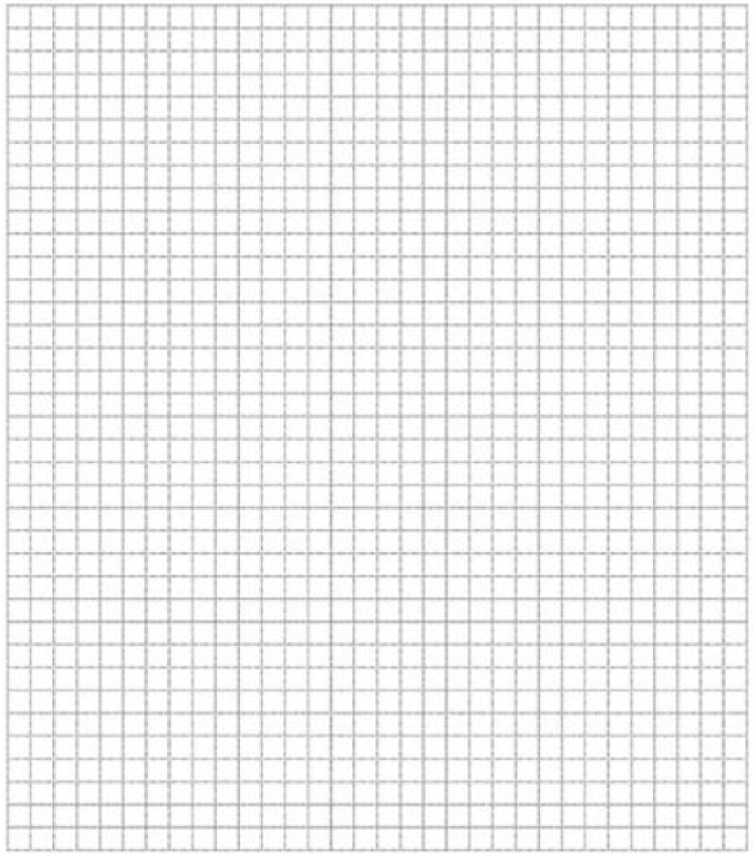
Aplicaciones

La Ciudad de la Cultura, en Santiago de Compostela, es un nuevo centro cultural para la Provincia de Galicia en el noroeste de España. Su diseño viene de la superposición de tres grupos de información. *1)* un plano topográfico del terreno en pendiente; *2)* un plano cartesiano y, *3)* a través de un software de modelación computacional, la topografía de la pendiente. La combinación de estos tres elementos permite distorsionar dos geometrías planas, las que generan una superficie topológica que reposiciona lo viejo y lo nuevo en algo nunca antes visto.

Usa las TIC

Encuentra más información en "La Ciudad de la Cultura / Eisenman Architects", en Archdaily, http://goo.gl/tHGQq (consultado el 2 de diciembre de 2016).

f) En el siguiente espacio grafiquen cada uno de estos casos. Utilicen un color diferente para cada uno.



Recuerda que...

De la función lineal $y = mx + b$, la letra b se conoce como ordenada al origen y corresponde al punto en el cual la gráfica corta o atraviesa, al eje de las ordenadas. De ahí su nombre.

2. Ahora, responde lo que se plantea a continuación.

a) ¿Qué tipo de gráfica corresponde a la razón de cambio de un fenómeno que se modela con una función lineal de la forma $y = mx + b$?

____

____

b) ¿Cómo se calcula la inclinación o pendiente de una recta?

____

____

c) De la función lineal $y = mx + b$, ¿cuál variable corresponde a la pendiente?

____

Al terminar, orientados por su profesor, revisen de manera grupal sus respuestas. Compartan comentarios acerca de los procedimientos que aplicaron para identificar la gráfica con la función lineal de las que no lo son, y arguméntenlos.

4.7. Medidas de dispersión

Contenido

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

LO QUE SÉ

En equipo, respondan las siguientes preguntas.

1. Mis calificaciones en este bimestre fueron: 6, 7, 8, 7, 9, 9, 10, 6, 8 y 8, ¿qué promedio me corresponde en el bimestre?, ¿cuál es la media de mis calificaciones y cuál la moda?

a) ¿Cuál es mi promedio? ____________________

b) ¿Cuál es la media de mis calificaciones? ____________________

c) ¿Cuál es la moda de mis calificaciones? ____________________

d) ¿Cuáles son los números enteros positivos? Escriban tres ejemplos.

__________, __________ y __________.

e) ¿Qué números se usan para representar una fracción? Escriban tres ejemplos.

__________, __________ y __________.

f) ¿Cuántos números decimales hay entre los enteros 2 y 3? Anótenlos.

____

____

g) ¿Qué calificaciones debería obtener el próximo periodo para que mi promedio sea de 9? Calculen la media y la moda de este conjunto de valores. Anoten los valores y las operaciones en el siguiente espacio.

____

____

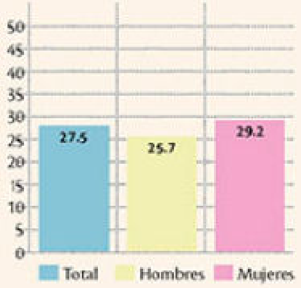
h) Comparen sus respuestas de manera grupal e intercambien argumentos acerca de sus procedimientos para calcular lo que se solicitó.

2. La siguiente información corresponde a los resultados de la Encuesta Nacional de Salud de 2011 sobre el Tabaquismo. Lee la información y contesta las preguntas.

La Encuesta de Tabaquismo en Jóvenes, realizada en el año 2011 a nivel nacional y subnacional (Ciudad de México, Oaxaca, Chilpancingo, Culiacán, Durango, Hermosillo, León, Mérida, Monterrey, Tepic, Toluca, Veracruz y Zacatecas), fue un proyecto conjunto de investigación nacional e internacional sobre el consumo de tabaco y las políticas de control en los adolescents mexicanos.

Figura 1

Estudiantes de 13 a 15 años susceptibles de consumir tabaco según sexo. México, ETJ 2011



La gráfica corresponde a los resultados de los adolescentes que nunca han fumado pero que aceptarían un cigarro si se lo ofreciera su mejor amigo y que piensan que quizá fumarán en los próximos 12 meses.

Fuente: Encuesta de tabaquismo en jóvenes. México 2011

Al momento de la aplicación, 27.5% de los adolescentes no fumadores era susceptible de comenzar a fumar. Cabe destacar que las mujeres (29.2%) refirieron mayor susceptibilidad de iniciar el consumo comparado con los hombres (25.7%) (figura 1).

Sin duda esta encuesta permite comprender mejor el comportamiento de la epidemia en los jóvenes mexicanos, evaluar el impacto de las políticas vigentes e identificar aquellas áreas de oportunidad que requieren de mayor énfasis por parte de quienes toman las decisiones.

Esta encuesta contribuye de manera significativa al monitoreo de la epidemia de tabaquismo en el país, y se convierte en un referente importante para el desarrollo de las políticas públicas de control del tabaco en México.

Creado con información de: Encuesta de tabaquismo en jóvenes. México, 2011. Instituto Nacional de Salud Pública. Primera edición, Instituto Nacional de Salud Pública, México, 2013. http://www.insp.mx/produccion-editorial/novedades-editoriales/2728-encuesta-de-tabaquismo-en-jovenes-mexico-2011.html (consultado el 2 de diciembre de 2016).

a) ¿Cuál fue la población seleccionada para la encuesta?

____

b) ¿Cuál fue la muestra en quienes se aplicó la encuesta?

____

c) ¿De qué manera se presentaron los datos para dar a conocer la información encontrada?

____

d) ¿Qué se buscaba con esta encuesta? ¿Por qué son importantes los resultados obtenidos?

____

e) Con base en la información presentada, elige un tema por investigar, define la población, muestra y objetivo. Anota tu plan en el cuaderno.

f) Comparte tus respuestas con el grupo y comenten acerca de qué aspectos son importantes para llevar a cabo una encuesta.

CONSTRUYO

Organizados en equipos, respondan lo siguiente.

Actividad 1. Diseñen una encuesta de cinco preguntas relacionadas con algún tema de interés, por ejemplo: deportes, materias favoritas, pasatiempo, etcétera.

a) Apliquen la encuesta, al menos, a 15 personas. Agrupen los resultados obtenidos en tablas y preséntenlos al grupo.

En la encuesta que diseñaron:

b) ¿Cuál es su población de estudio? ______________________________

c) ¿Qué características particulares tenía su universo? ______________________________

d) ¿Tuvieron alguna muestra en su estudio? ¿Dónde se puede ver? ______________________________

e) Al terminar, comparen las maneras en que llevaron a cabo las encuestas y cómo presentaron los resultados obtenidos. Escuchen argumentos y opinen.

Actividad 2. En la asignatura de matemáticas cada semana se cuenta el total de participaciones de los alumnos. La siguiente lista muestra el número de participaciones de algunos estudiantes en este bimestre.

Laura: 4, 12, 26, 24, 22, 13, 19, 18
Carlos: 7, 15, 12, 24, 24, 42, 20, 17
Susana: 20, 18, 20, 21, 23, 23, 21, 20

a) ¿Cuál es la media aritmética de las participaciones de cada uno?

Laura ______________________________

Carlos ______________________________

Susana ______________________________

b) ¿Qué información se obtiene con el dato anterior?

____

En el salón, se presenta en un cuadro de honor a los alumnos que obtuvieron el mejor promedio de participación durante el mes.

c) ¿A quién le corresponde estar en el primer lugar del cuadro de honor?

____

d) ¿Quién obtuvo el más alto puntaje por semana?

____

e) ¿Quién se alejó más del promedio en alguna semana?

____

f) Verifiquen cuál es el intervalo en el que se encuentra del total de participaciones de los tres estudiantes.

Laura ______________________________

Carlos ______________________________

Susana ______________________________

Recuerda que...

El manejo de la información nos ayuda a interpretar la realidad al recopilar datos mediante encuestas , o bien, por medio de los valores obtenidos al llevar a cabo un experimento: organizarlos, presentarlos, analizarlos e interpretarlos para su adecuado manejo y toma de decisiones. Su uso puede servir para comprender mejor el entorno que nos rodea.

PARA TENERLO PRESENTE

Al conjunto de datos que se encuentra comprendido entre el número mayor y el número menor se le conoce como *rango*. Para calcularlo es necesario restar al valor mayor de los datos el valor menor. De esta forma se puede conocer su dispersión.

$$\text{Rango} = \text{Valor}_{\text{máximo}} - \text{Valor}_{\text{mínimo}}$$

Las *medidas de dispersión* nos indican si los datos son cercanos entre sí o están muy dispersos, es decir, muestran si están más o menos cerca de la medida central.

Actividad 3. En la siguiente tabla se muestran las ventas de automóviles de una agencia en el mes de diciembre.

Recuerda que...

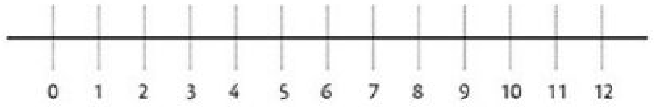
Para conocer la dispersión de un conjunto de datos necesitamos tener una referencia, en este caso, la media aritmética o promedio.

Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4
3	2	8	4
2	3	7	5
2	4	9	4
5	6	11	3
2	4	10	8
4	5	12	9

a) Calculen el promedio mensual de ventas de la agencia.

b) ¿Cuál fue la mayor cantidad de automóviles vendidos en un día?

c) En la siguiente recta, ubiquen el mínimo y el máximo de ventas registrados durante todo el mes, y localicen el punto que corresponda a la media aritmética.



Para distinguir la dispersión de los datos, coloquen un signo negativo a aquellos que resulten menores que la media aritmética.

d) Calculen cuál es la mayor diferencia de la cantidad de automóviles vendidos en un día, en relación con la media aritmética del mes. ____________

e) ¿Cuál es la diferencia de las ventas promedio de la primera semana con referencia a la media aritmética mensual? ____________

f) ¿Cómo es la dispersión de las ventas semanales con respecto a la media aritmética mensual? ____________

g) ¿En qué semana las ventas estuvieron más cercanas respecto de la media aritmética mensual? ____________

h) ¿En qué semana las ventas estuvieron más dispersas respecto de la media aritmética mensual? ____________

g) Comparen sus respuestas con otro equipo y comenten acerca de los procedimientos que aplicaron.

PARA TENERLO PRESENTE

Las *medidas de dispersión* son indicadores que muestran cuánto se alejan del promedio los valores de una distribución.

La *desviación* es la diferencia que hay entre la media aritmética y los datos analizados.

Actividad 4. Un veterinario atendió a 10 perros el día lunes; y el tiempo que duró cada consulta fue el siguiente:

Recuerda que...

El *valor absoluto* es la diferencia entre un valor y otro, sin importar si la diferencia es positiva o negativa, es mayor o igual a cero y nunca es negativo. Se indica colocando el número entre dos barras.

129 min, 190 min, 55 min, 88 min, 148 min, 203 min, 60 min, 154 min, 90 min, 115 min

a) ¿Cuál es la media aritmética de la duración de las consultas?

b) En la siguiente tabla, calculen la desviación media de las consultas:

n	x_i min	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
1	129		
2	190		
3	55		
4	88		
5	148		
6	203		
7	60		
8	154		
9	90		
10	115		
		$\Sigma =$	$\Sigma =$

c) ¿Cuál es el rango de las consultas que dio el veterinario? ____________

d) ¿Cuál es la dispersión de cada consulta respecto a la media? ____________

Recuerda que...

Σ es la decimoctava letra del alfabeto griego, la representación mayúscula se utiliza como símbolo para indicar una suma.

e) Comenten sus hallazgos y las razones por las que un negocio debería tener controlado el tiempo que tarda entre una consulta y otra (en promedio).

PARA TENERLO PRESENTE

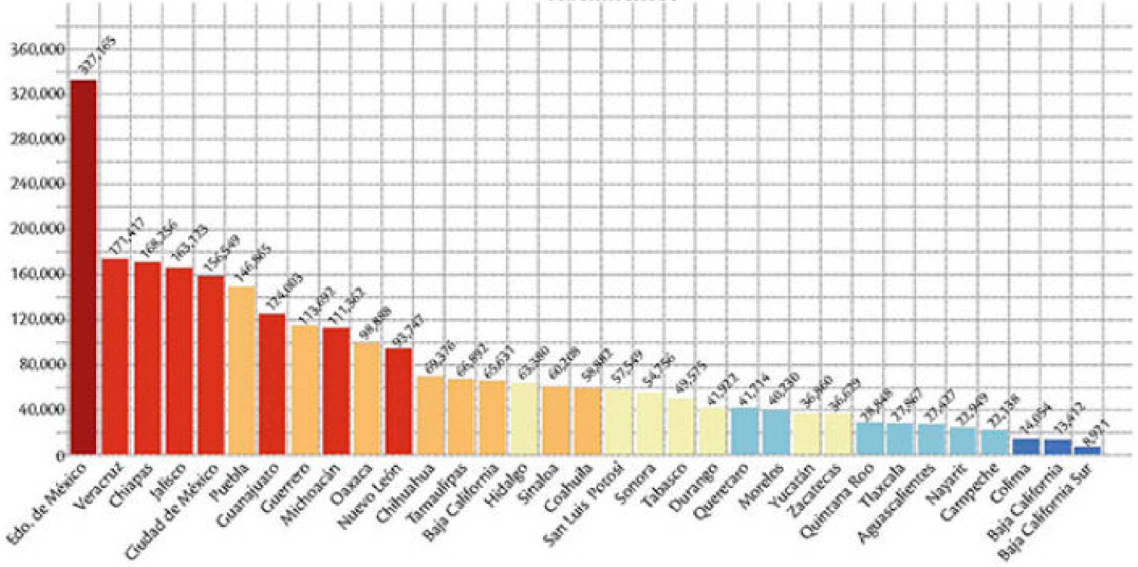
La *desviación media* (DM) es el cociente que resulta de la suma de todos los valores absolutos de los datos y la media aritmética entre el número total de datos.

PARA TERMINAR

Resuelve de manera individual, lo que se pide en cada caso.

1. La siguiente gráfica muestra los nacimientos durante el 2011 en cada entidad federativa de la República Mexicana:

Nacimientos



Fuente: INEGI, http://www3.inegi.org.mx/sistemas/statisticsexplorer/0/index.html#story=0 (consultado el 2 de diciembre de 2016).

A partir de esta información el Sistema Educativo Nacional pretende hacer una planeación respecto a la cantidad de profesores y escuelas que son necesarios para la educación básica en los próximos años.

Con base en la información presentada, contesta:

a) ¿Consideras que las medidas de tendencia central –media aritmética o mediana– pueden ser útiles para saber cuántas escuelas se deben construir en cada estado? Argumenta tu respuesta. ______________________________

____

b) ¿Cuál es la desviación media de nacimientos? ______________________________

c) ¿Cómo interpretas la desviación obtenida en los estados de Jalisco, Baja California y Ciudad de México?

____

d) El rango (R) es la medida de dispersión más sencilla, ¿cómo se calcula? Escribe un problema corto para calcularlo. ______________________________

____

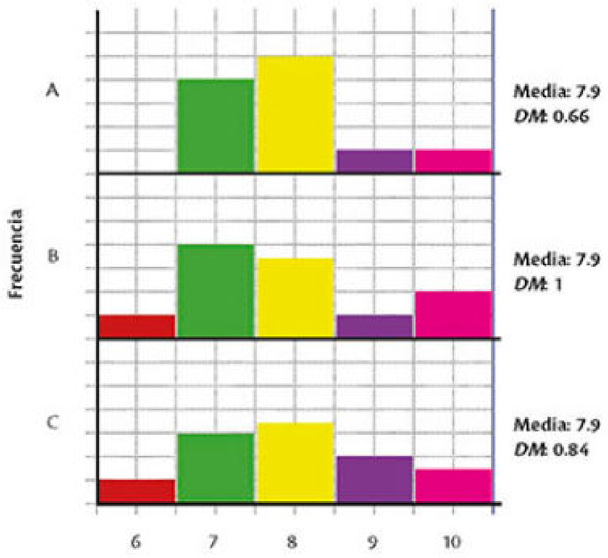
____

e) La desviación media (*DM*) es una medida de dispersión que mide el promedio de la desviación de los datos con respecto a la ______________________________.

f) Comenten de manera grupal los procedimientos que aplicaron y comparen sus respuestas.

2. Analiza la siguiente gráfica y contesta las preguntas.

Calificaciones de matemáticas en los tres grupos de tercer grado



a) Verifica que los valores de la media aritmética y de la desviación media sean correctos.

b) ¿Cuál es la gráfica con la menor desviación media?

____

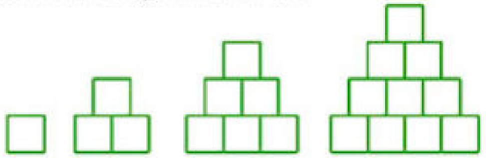
c) ¿Cómo sería la gráfica con menor desviación media a las presentadas?

____

d) Comenta de manera grupal los procedimientos que aplicaron y comparen sus respuestas.

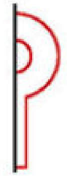
Resuelve cada una de las siguientes situaciones seleccionando la opción que contenga la respuesta correcta. Al finalizar, revisen en grupo esta prueba, sus resultados y procedimientos.

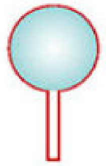
1. Observa cuántas figuras se requieren para formar arreglos en cada nivel y determina con cuántas figuras se forma el arreglo con 20 niveles.



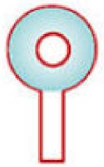
a) 50
b) 95
c) 60
d) 105

2. Al girar la figura sobre el eje que se especifica, ¿en cuál inciso se representa el cuerpo que se forma?



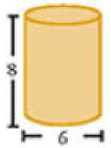
a)


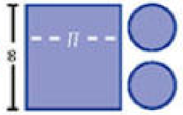
c)

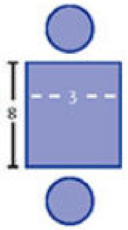

b)


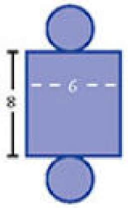
d)

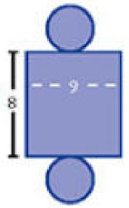

3. De acuerdo con las medidas que se dan, el desarrollo plano que corresponde al cuerpo geométrico que se representa es:



a)


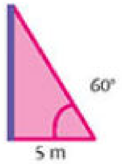
c)


b)


d)


4. Calcula la altura del poste, si la longitud de su sombra es de 5 metros y el ángulo del cable que lo fija mide 60°.

Se sabe que sen 60° = 0.866; cos 60° = 0.5 y tan 60° = 1.732

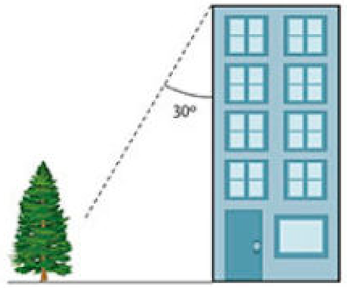


a) 2.88 m
b) 4.33 m
c) 8.66 m
d) 10.00 m

5. En la plaza municipal hay un conjunto de juegos, entre los que destaca una resbaladilla de 2.1 m de altura. ¿Cuánto mide de largo su rampa si tiene una inclinación de 30°?

a) 4.2 m
b) 2.4 m
c) 1.21 m
d) 1.05 m

6. Desde la parte alta de un edificio de 10.8 m se observa un árbol. De acuerdo con el ángulo de la figura, ¿con cuál razón trigonométrica se calcula qué distancia hay entre el árbol y el edificio?



a) cos 30°
b) sen 60°
c) tan 30°
d) cos 60°

7. De las siguientes listas de números, la que tiene mayor desviación media es:

Lista 1	5	8	17	12	9
Lista 2	6	11	15	11	6
Lista 3	5	9	16	13	15
Lista 4	18	14	12	10	8

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

8. Un tren de juguete recorre a velocidad constante 2 m cada 10 s. Identifica, para esta situación, las condiciones que se cumplen para ella.

I. Su gráfica es una parábola.
II. Su gráfica es una recta.
III. Es de la forma $y = kx^2$.
IV. Es de la forma $y = kx + b$.
V. Es de la forma $y = kx$.
VI. Pasa por el punto (2, 10) y se abre hacia arriba.
VII. Pasa por el punto (0, 0) pues es una relación de proporcionalidad.
VIII. No tiene pendiente, pues es una curva.
IX. Su ordenada al origen es 10.
X. Su pendiente es 5.

a) I, III, VI, VIII
b) I, III, VII, IX
c) II, IV, VI, IX
d) II, V, VII, X

Registro mis avances

Tema	Problema	Aciertos	En esta sección, marca tu nivel de aprendizaje alcanzado en cada tema. Considera las observaciones de tu profesor			
			Requiero de total apoyo	Necesito practicar	Casi lo domino	Óptimo
Patrones y ecuaciones	1					
Figuras y cuerpos	2, 3					
Medida	4, 5, 6					
Proporcionalidad y funciones	8					
Análisis y representación de datos	7					
Mi total de respuestas correctas			Mi porcentaje de respuestas correctas			

Cambio climático y modelos matemáticos

En equipo, lean el siguiente texto, coméntenlo, contesten las preguntas que se plantean y propongan alternativas de solución.

Cada día es más común escuchar acerca de desastres provocados por cambios en la naturaleza, también conocidos como *eventos climáticos extremos*, por ejemplo: ondas de calor, ondas gélidas, sequías, granizadas, zonas devastadas por huracanes, lluvias torrenciales, inundaciones, etcétera. Todos ellos han provocado grandes pérdidas económicas, daños a la salud y, lo más grave, fallecimientos. Las sequías se están volviendo más comunes y largas cada año, provocando, entre otras cosas, migración humana y pobreza.

En las ciudades el número de personas afectadas es mayor, no sólo por la concentración de la población, sino por los largos periodos en los que se da una *regulación microclimática*, originada por la plancha de cemento que cubre las calles. Esta plancha absorbe calor, incrementa la temperatura promedio del lugar, reduce la evaporación, impide la infiltración del agua de lluvia en el suelo, disminuye la humedad ambiental e incrementa el riesgo de inundaciones; además, la carencia de áreas verdes evita elevar la humedad del ambiente y que se mantenga una temperatura estable.

Considera como referencia el lugar donde vives y contesta:

a) ¿Cuál es la máxima temperatura registrada en tu comunidad?

b) ¿De cuántos grados es la mínima temperatura registrada?

c) ¿Cuál es el porcentaje aproximado de distribución entre plancha de cemento y áreas verdes?

Algunas repercusiones de la onda de calor son pérdida de cosechas, aumento de incendios forestales, fallecimientos por deshidratación y lo que se conoce como *golpe de calor*, esto es, el cuerpo no disipa el calor mediante el sudor, ni a través de la piel y su temperatura puede alcanzar hasta 40 °C o más.

a) ¿Sabes qué otras enfermedades se pueden producir por el exceso de calor?

b) ¿Quiénes son las personas más susceptibles a estas enfermedades?

c) ¿Conoces las medidas que se deben seguir para evitar estas enfermedades?

Uno de los efectos más notorios del calentamiento global es la expansión de los océanos debido al derretimiento de los polos. En el año 2004, se calculó que la altura del mar aumenta 2 mm por año.

El agua también aumenta su volumen al ganar temperatura, ocasionando además mayor frecuencia e intensidad de los huracanes; a su vez, los huracanes acarrean lluvias torrenciales. Algunas consecuencias de la lluvias torrenciales son: inundaciones masivas en casas y campos de cosecha.

d) De mantenerse la tendencia de aumento en el mar, ¿qué puede ocurrir en algunos años con los lugares que se encuentran al nivel del mar?

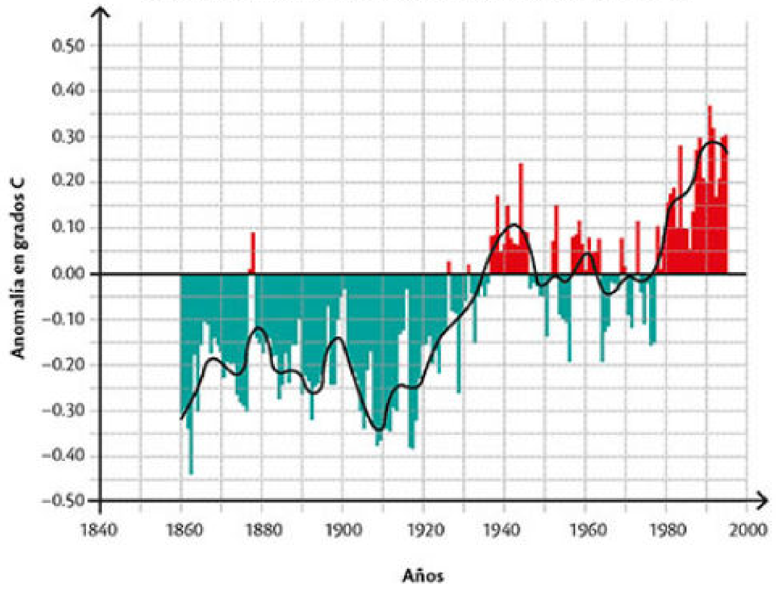
e) Muchos de los problemas actuales en el medio ambiente se deben al *cambio climático*. Contesta: ¿a qué se refiere el término?

Organizados en equipo busquen la información que se solicita:

1. Investiguen acerca de lo que significa el *cambio climático*, coméntenlo en equipo y presenten al grupo la información recabada.
2. Analicen la siguiente gráfica.

Datos del clima mundial

Anomalías climáticas en la temperatura del aire, de 1860 a 1994



a) ¿De qué tipo de gráfica se trata?

b) En el eje horizontal los datos se refieren a

c) En el eje vertical los datos que se muestran corresponden a

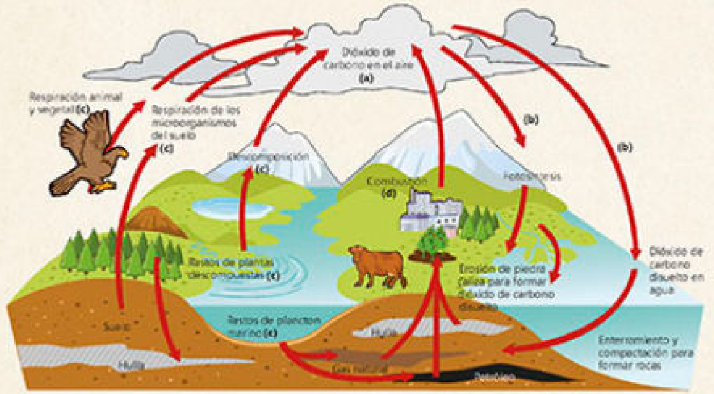
d) Describan en su cuaderno lo que representa la gráfica.

3. Distribúyan los siguientes temas y, en equipos, realicen la investigación correspondiente:
   a) Cambio climático
   b) Efecto invernadero
   c) Evidencias del cambio climático
   d) Las consecuencias del cambio climático
   e) Efectos del cambio climático sobre la biodiversidad
4. Utilizando alguna gráfica, presenten al grupo el trabajo que cada equipo investigó.
5. Apoyándose en lo que aprendieron en la asignatura de ciencias, completen el tema.

El Ciclo del Carbono

Desde hace cientos de años las distintas actividades del hombre, como la cría de ganado, la destrucción de bosques, la utilización de carbón para producir energía (acción tan explotada desde la revolución industrial), así como las combustiones derivadas del petróleo y del gas producen cada vez más carbono en el ciclo.

El bióxido de carbono es absorbido por los océanos y la vegetación, lamentablemente, las cantidades de este contaminante sobrepasan la capacidad de absorción por parte de la naturaleza y junto con otros gases de efecto invernadero aumentan diariamente la concentración de todos estos en la atmósfera.



3. Investigen la emisión per cápita de CO_2 en algunos países y el nuestro y la emisión nacional de gases de efecto invernadero. Agreguen estadísticas e interprétenlas.
4. Investiguen qué acciones, tanto internacionales como nacionales, se están llevando a cabo para evitar el cambio climático.

Entre las acciones que el gobierno hace al respecto, se encuentra la creación del Instituto Nacional de Ecología y Cambio Climático, derivado de la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat). Sus objetivos específicos son los que se muestran a continuación.

I. Actualizar de manera periódica el inventario nacional de emisiones de gases de efecto invernadero, por fuentes y sumideros.

II. Elaborar comunicaciones nacionales ante la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático.

III. Llevar a cabo estudios metodológicos para la mitigación de emisiones de gases de efecto invernadero en los sectores energético y forestal; análisis de la variabilidad climática y el cambio climático.

IV. Efectuar estudios metodológicos para la evaluación de la vulnerabilidad y de las opciones de adaptación al cambio climático.

V. Desarrollar escenarios de emisiones futuras.

VI. Efectuar estudios sobre los beneficios al reducir la quema de combustibles fósiles en las ciudades y promover el desarrollo de tecnologías más limpias.

3. Hagan una campaña que, como comunidad, contribuya a reducir los riesgos de provocar alteraciones en el medio y nos permita prepararnos para enfrentar con mejores condiciones el cambio climático. Promuévanla en su escuela.

Consulten las siguientes fuentes para sus investigaciones:

- "El glosario de la FAO sobre el cambio climático y la bioenergía" en Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura, www.fao.org/climatechange/en/, (consultado el 2 de diciembre de 2016).
- "Cambio climático" en Naciones Unidas-Centro de Información, Conferencia de la ONU sobre el cambio climático, www.cinu.org.mx/temas/des_sost/camclim.htm, (consultado el 2 de diciembre de 2016).
- Cambio climático. [en línea], www.cambioclimatico.org/contenido/preguntas-y-respuestas, (consultado el 2 de diciembre de 2016).
- "Cambio climático. Ciencia, evidencia y acciones", en Semarnat, www.conafor.gob.mx/biblioteca/cambio_climatico_09-web.pdf, (consultado el 2 de diciembre de 2016).
- "La ciencia del cambio climático", en Semarnat, http://www.inecc.gob.mx/cpcc-ciencia, (consultado el 2 de diciembre de 2016).
- "Notines" en Instituto Nacional de Ecología, http://www2.inecc.gob.mx/ines/CambioClimatico.htm, (consultado el 2 de diciembre de 2016).
- "El cambio climático, ¿qué es?", en Organización de Estados Iberoamericanos. es, http://www.oei.es/decada/portadas/climate_change_youth_es.pdf, (consultado el 2 de diciembre de 2016).

BLOQUE 5

Ejes	Temas	Contenido	Sesiones
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	5.1. Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	4
Forma, espacio y medida	Medida	5.2. Análisis de las secciones que se obtienen al hacer cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	5
		5.3. Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	5
		5.4. Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	5
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	5.5. Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	5
	Nociones de probabilidad	5.6. Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	5

Para lograr los aprendizajes esperados planteados en este bloque se sugiere la dosificación de contenidos en sesiones para cada tema como se muestra en la tabla; además, se recomienda destinar dos sesiones para la aplicación y revisión de exámenes y cinco sesiones para el desarrollo y la presentación de las actividades de la sección "Aplicaciones matemáticas" y 10 sesiones de repaso general y reforzamiento de temas del tercer grado al finalizar el bloque.

APRENDIZAJES ESPERADOS

En este bloque, el estudiante aprenderá a:

- Resolver y plantear problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resolver problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipar cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Leer y representar, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resolver problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

El estudio de las matemáticas en la educación básica favorece las siguientes competencias:

- **Resolver problemas de manera autónoma**
- **Comunicar información matemática**
- **Validar procedimientos y resultados**
- **Manejar técnicas eficientemente**

EJE **SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO**

TEMA **Patrones y ecuaciones**

Contenido

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

5.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones

LO QUE SÉ

Lee los siguientes problemas y resuelve las preguntas en tu cuaderno.

1. Analiza la siguiente tabla y contesta las preguntas.

Kilos de zanahorias	1	2	3	4	5
Precio	8	16	24	32	40

a) ¿Qué relación hay entre las dos variables? ____________________
b) Escribe una expresión que represente los datos de la tabla. ____________________
c) ¿De qué otra manera se podrían representar los datos de la tabla?
____
d) Escribe un problema en el cual se utilicen los datos de la tabla.
____
____
e) Comparte tu problema con los de tus compañeros y seleccionen algunos para resolver entre todo el grupo.

2. Pedro es geólogo y le gusta coleccionar trozos de rocas y gemas. El domingo pasado estuve en su casa y observé que tiene una repisa con gemas de varios colores que coleccionó al viajar por el país; en algunas líneas (horizontales o verticales) tiene escrita la cantidad total que pagó por todas las gemas de esta.

a) Si las piedras de un mismo color costaron lo mismo, organizados en equipo, calculen el precio de cada una.
b) Compartan sus procedimientos y resultados con el resto del grupo y con su profesor.

3. Juan preparará ensalada de manzana, para ello compró manzanas rojas que costaron $32 el kilo y manzanas amarillas, a $26 el kilo. Juan compró 6 kg de manzanas y pagó $186.

a) Escribe la expresión algebraica que representa la compra hecha por Juan, ¿con una expresión es suficiente? ____________________
b) ¿Cuántos kilos de manzana roja compró? ____________________
c) ¿Cuántos kilos de manzana amarilla compró? ____________________
d) ¿Qué procedimiento utilizaste para resolver el problema? Anótalo.
____
____
e) Compara tu procedimiento con un compañero, ¿en qué se parecen?, ¿en qué difieren? Lleguen a un procedimiento común y comuníquenlo al grupo.

4. Reunidos en equipos, lean los siguientes planteamientos, comenten sus respuestas, lleguen a acuerdos y contesten sobre la línea.

a) ¿Cuántos tipos de ecuaciones conocen? ____________________
b) ¿Por qué es importante definir las variables para resolver el problema? ________
____
c) Menciona algunas estrategias para resolver ecuaciones.
____
____
____

CONSTRUYO

Reúnanse en equipos de tres integrantes para resolver las siguientes actividades.

Actividad 1. Con base en la siguiente información, escribe la expresión algebraica que corresponde a cada uno de los enunciados.

	Enunciado	Ecuación
a)	El área de un rectángulo de base x, cuya altura mide 8 cm menos que la base.	
b)	El lado de un cuadrado mide $x + 7$, ¿cuál es el área del cuadrado?	
c)	Volumen de un cubo de 4 cm de arista.	
d)	La diferencia del cuadrado de un número y 7.	

e) Revisen las expresiones que plantearon con el equipo más cercano. Si existieran diferencias, comenten las razones que tuvieron para plantear así la ecuación y lleguen a una respuesta común. Validen sus respuestas con apoyo de su profesor.

Recuerda que...

Una ecuación es una igualdad algebraica que solo es cierta para un determinado valor de la incógnita.
Un número es solución de la ecuación si al sustituir la incógnita por este número la igualdad se verifica.
Ejemplo: $x + 6 = 3$; $x = -3$

REFLEXIONA Y RESPONDE

Si en una tabla los valores de *y* están ordenados y se encuentra que entre uno y otro su diferencia es constante, entonces su modelo algebraico es lineal; si la constante se encuentra hasta las segundas diferencias, entonces su modelo algebraico es de segundo grado. ¿Ocurrirá que, en una expresión de tercer grado, los valores de *y* tendrán su constante hasta las terceras diferencias? Compruébalo en tu cuaderno y comparte tu razonamiento con el resto del grupo y tu profesor.

Investigo

Investiga cuántas maneras existen para resolver un sistema de ecuaciones. ¿Habrá alguna diferencia en las soluciones si se utiliza un método u otro?

Actividad 2. Reúnanse en equipos. Para cada uno de los siguientes problemas establezcan la ecuación con la que se soluciona el planteamiento y resuélvanlo. Al finalizar, expongan sus resultados y argumenten acerca de los procedimientos empleados. Validen sus respuestas con apoyo de su profesor.

1. Un triángulo rectángulo y un cuadrado tienen el mismo perímetro. Calculen el área de cada figura, sabiendo que la base del triángulo mide 12 cm y su altura es de 1 cm.

2. Dos hermanos ahorraron durante un año. El mayor aportó $100 mensuales más que el menor. Ambos hermanos mantuvieron constante la misma cantidad mensual. Si en total ahorraron $4 800, ¿cuánto ahorró cada mes el hermano menor? Hagan las operaciones en el siguiente espacio.

3. La diferencia de dos ángulos suplementarios es 40°. Calculen la medida de cada uno.

Actividad 3. De manera individual, lee y resuelve los siguientes problemas. Comparte tu procedimiento de solución con el del compañero de al lado. Revisen las diferencias y similitudes, y validen sus respuestas con apoyo de su profesor.

1. Calcula las medidas de un rectángulo que ocupa un área de 644 cm^2, considera que de ancho mide 5 cm menos que de largo. Esquematiza el problema y anota las operaciones en el espacio de abajo.

Ancho: ______________ cm

Largo: ______________ cm

2. Calcula el área de un jardín de forma cuadrada del que se sabe que si se reduce en 2 m por lado ocupa un área de 8 m^2. Si se redujera 3 m por lado, ¿cuál sería el área restante? Haz un esquema y anota las operaciones en el espacio de abajo.

Lado: ______________ m

Recuerda que...

Las ecuaciones son muy útiles para resolver problemas, para ello se plantea una relación de igualdad. Para encontrar la solución de una ecuación es muy importante considerar los siguientes puntos:

- Identificar la incógnita
- Plantear la ecuación
- Resolver la ecuación planteada
- Comprobar la solución obtenida

Aplicación

En economía o en física es muy común encontrarse con problemas cuya solución requiere plantear una ecuación o varias. Las soluciones de estas tienen información relevante para comprender cómo puede manipularse el precio del dólar o del petróleo, o saber qué distancia recorre una partícula que se mueve casi a la velocidad de la luz.

Actividad 4. Para la venta de mañana, compré dos tipos de jugo: 15 litros del tipo *b* y 10 litros del tipo *c*, y pagué $185. Mi primo compró 10 litros del tipo *b* y 15 litros del tipo *c*, pagando por ellos $190.

a) Tabulen los datos en su cuaderno.
b) Grafiquen a partir de los valores de la tabla.
c) Respondan: ¿cuánto cuesta el litro de jugo tipo *b*? ______________________, ¿cuál es el precio del litro de jugo *c*? ______________________
d) Comparen sus gráficas y comenten sus procedimientos de resolución. Validen los resultados con la orientación del profesor y corrijan de ser necesario.

PARA TERMINAR

Resuelve de manera individual las situaciones a continuación. Cuando termines, intercambia tu libro con un compañero y revisen sus procedimientos de solución. Comenten las similitudes y diferencias de sus procedimientos y compártanlas con el resto del grupo. Corrijan lo que sea necesario y consulten sus dudas con el profesor.

1. Formula para cada inciso un problema que involucre la ecuación dada y escríbelo sobre las líneas. Al terminar, lean grupalmente algunos y resuélvanlos con orientación de su profesor. Anoten el procedimiento en el espacio a continuación.

a) $x^2 - 100 = 0$

____
____
____
____
____
____

b) $2(x + 4) = 3x - 10$

____
____
____
____
____
____

2. Carlos y Daniel están jugando a adivinar números. Cada uno escribió uno. La suma de los cuadrados de esos dos números es 900. Traza en la cuadrícula de la siguiente página la gráfica de todas las posibles parejas de números que cumplen con esa condición. ¿Qué figura geométrica forma la gráfica?

3. Una tabla de forma rectangular excede en 4 cm a su ancho. Si cada lado midiera 4 cm más su área se duplicaría. Calcula las medidas de la tabla. Haz un esquema y anota las operaciones en el espacio en blanco. Luego, contesta: si esta tabla fuera la mesa de tu casa, ¿para qué te serviría conocer sus medidas?

4. La longitud de una habitación excede un metro a su ancho. Se piensa ampliar 2 m más por lado para que ocupe un área de 24.75 m^2. Haz un esquema en el siguiente espacio y calcula las nuevas medidas.

REFLEXIONA Y RESPONDE

Si en un sistema de dos ecuaciones de primer grado, de la forma $y = mx + b$, los coeficientes de *x* son iguales, entonces sus gráficas son líneas rectas paralelas. ¿Cómo son sus gráficas si los coeficientes de *x* son recíprocos y de signo contrario? ______________________

¿Por qué? ______________________

Contenido

Análisis de las secciones que se obtienen al hacer cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

5.2. Cortes planos

LO QUE SÉ

Organícense en parejas para llevar a cabo las siguientes actividades.

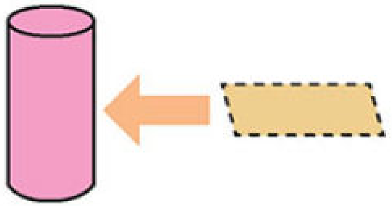
1. Por parejas y con anticipación, consigan una cartulina de cualquier color y un palo de madera o popote. Hagan lo siguiente.
   - En la cartulina, dibujen un rectángulo de 15 × 7 cm.
   - Recorten el rectángulo. Peguen el palo de madera o popote a uno de los lados mayores del rectángulo, como una bandera angosta.
   - Coloquen en sus manos la "bandera" y gírenla como si se frotaran ambas manos.

   a) ¿Qué figura se formó al girar la "bandera"? Descríbela o dibújala en tu cuaderno.
   b) Si en vez de utilizar un rectángulo se hubiera utilizado un triángulo rectángulo, ¿qué figura se formaría al girar el soporte? ______
   c) Si en vez de utilizar un rectángulo se hubiera pegado un medio círculo, ¿qué figura se formaría al girar el soporte? ______
   d) ¿Dónde se encuentra el eje de revolución o eje de rotación en la construcción que hicieron? ______
   e) ¿Qué cuerpo se forma si giras un triángulo equilátero de tal manera que el eje de rotación coincida con la altura del triángulo? ______
   f) Con tus compañeros del salón, revisen las respuestas a las preguntas anteriores y comenten sus razonamientos. Con ayuda de su profesor establezcan una conclusión grupal.

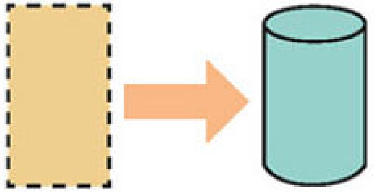
2. Dibujen objetos de uso cotidiano que tengan forma de esfera, cilindro y cono, respectivamente. En el siguiente espacio dibujen cómo se vería cada uno de esos objetos si lo abrieran y los extendieran en una superficie plana.
   a) Compartan sus dibujos con el resto del grupo y comenten cuáles serían las opciones correctas y por qué. Validen sus respuestas con apoyo del profesor.

CONSTRUYO

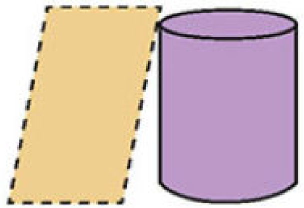
Actividad 1. Resuelve las actividades siguientes como se indica.



1. Se tiene un cilindro que mide 10 cm de altura y cuyo diámetro de la base mide 5 cm. Contesta y comenten en grupo:
   a) ¿Qué figura geométrica tiene de base? ______
   b) Si se hace pasar un plano paralelo a la base que corte al cilindro, ¿qué figura se forma en esa sección de corte?
   ______
   c) ¿Las medidas de la sección de corte son diferentes de las de la base del cilindro? ¿Por qué? ______
   ______
   d) En el espacio en blanco, dibujen la sección que se obtiene al hacer el corte.



2. Si se hace pasar por el cilindro un plano perpendicular a la base, contesta:
   a) ¿Qué figura se forma en la sección de corte?
   ______
   b) ¿Qué medidas corresponden a la sección de corte?
   ______
   c) Dibujen la sección que se obtiene al hacer el corte.



3. ¿Qué figura se forma si se tiene un cilindro y se hace pasar por él un plano de corte en forma diagonal?

   En caso necesario, construyan la figura con plastilina y con una tarjeta plástica, efectúen el corte para comprobar el resultado.

   a) La figura que se forma es ______.
   b) Comenten en grupo el razonamiento que aplicaron previo a formular su respuesta.

PARA TENERLO PRESENTE

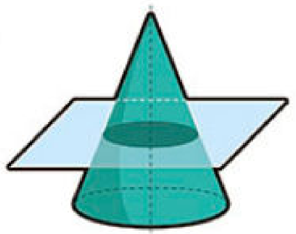
Al hacer pasar un plano por un sólido se forman secciones o cortes, estos determinan figuras diversas, dependiendo del sólido y el ángulo con el que se haga el corte.

Investigo

Investiga cómo se obtuvieron por primera vez las secciones cónicas y quién lo hizo.

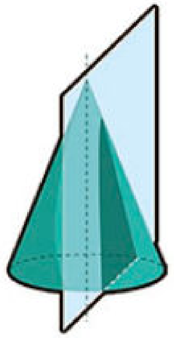
Actividad 2. Trabaja de manera individual. Escribe qué figura se forma al cortar el cono por el plano cuya posición se indica en cada inciso. Si lo consideras conveniente, utiliza un cono de papel para beber agua, realiza el corte y repasa con un marcador la orilla. Presenten como grupo sus resultados.

Plano paralelo a la base



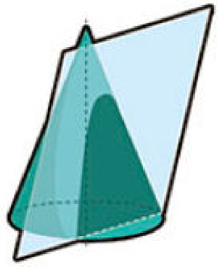
a) La figura que se forma es ______________________________.

Plano perpendicular a la base



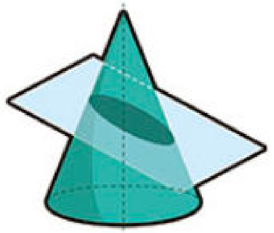
b) La figura que se forma es ______________________________.

Paralelo a la generatriz



c) La figura que se forma es ______________________________.

Diagonal



d) La figura que se forma es ______________________________.

HISTÓRICAMENTE

Andreas Vesalius (1514-1564) fue el primer médico que identificó estructuras anatómicas en seres humanos. En su obra *De humani corporis fabrica (Sobre la estructura del cuerpo humano)*, publicada en 1543, se encuentra la descripción detallada del cuerpo humano, que logró haciendo cortes, como si el órgano o cuerpo fuera un cuerpo geométrico.

PARA TENERLO PRESENTE

Las curvas que se obtienen al cortar de diferentes maneras un cono reciben el nombre de *cónicas*. En los casos de los incisos *a)* y *d)* de la Actividad 2, se obtuvieron la circunferencia y la elipse. En el caso del inciso *b)* la curva de la sección de corte es una parábola. En el caso del inciso *c)* la curva de la sección de corte es una hipérbola.

Actividad 3. Por parejas, modelen una esfera utilizando una tableta de plastilina y con una espátula hagan los siguientes cortes. Después, contesten lo que se solicita.

a) A la esfera háganle un corte en cualquier lugar, ¿qué figura se observa en el lugar del corte? ____________________

b) Hagan varios cortes paralelos al corte inicial, ¿que figuras se obtienen?

____

c) Las figuras del inciso anterior, ¿son congruentes? ¿Por qué?

____

d) ¿Qué sucede si se cambia el ángulo de inclinación del corte?

____

REFLEXIONA Y RESPONDE

¿En qué parte se tendrá que cortar una esfera para obtener el circulo máximo? Comenta con tus compañeros tu razonamiento y lleguen a una conclusión grupal.

Actividad 4. Traza en el espacio en blanco las figuras que se forman si se tiene un cilindro cuya altura mide 5 cm y el radio de la base mide 2 cm, y se atraviesa con el plano de corte que se indica en cada inciso. Comenten en grupo sus resultados.

a) Plano paralelo a la base

b) Plano perpendicular a la base

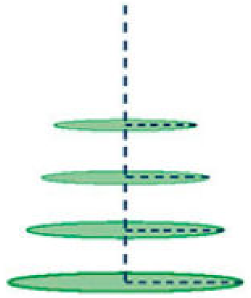
Actividad 5. En equipo, resuelvan lo que se solicita a continuación.

a) Se tiene un cono cuya altura mide 10 cm y el radio de la base mide 4 cm. Calculen las medidas que se piden y regístrenlas en la tabla. Comenten con el grupo sus resultados y procedimientos. Al finalizar, tracen la gráfica correspondiente.

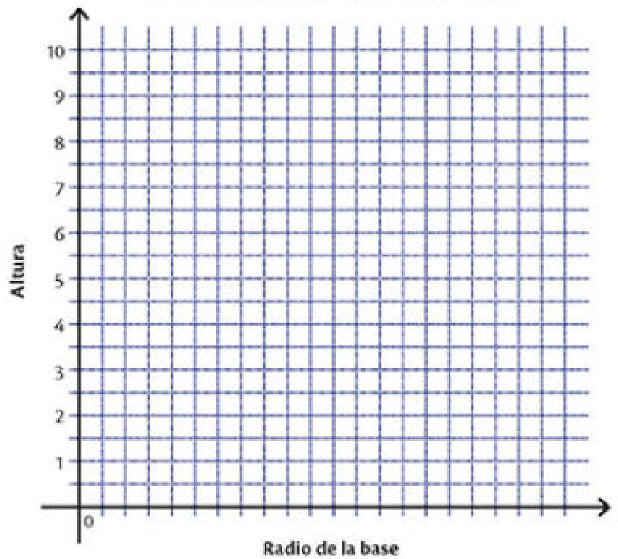
Aplicación

Las secciones cónicas se obtienen al hacer cortes con un plano a un cono tridimensional. Estas secciones se utilizan para describir los movimientos de objetos celestes como cometas, planetas, asteroides, etcétera. Isaac Newton basó casi toda su obra en describir matemáticamente estas secciones.

Altura (cm)	Radio (cm)
10	4
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	



Relación entre la altura de un cono y su base



b) ¿Qué tipo de relación se forma entre la altura de un cono y su base?

____

c) Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Comparen sus procedimientos y corrijan lo que sea necesario.

PARA TERMINAR

De manera individual, resuelvan lo siguiente.

1. Se corta a la mitad un cono cuya altura mide 15 cm y el radio de la base mide 5 cm.

   a) Dibuja el modelo para resolver el problema.
   b) Calcula el área que ocupa la base correspondiente a cada cono.

2. Considera que se tiene una esfera cuyo diámetro mide 10 cm y al hacerle un corte con un plano se forma un círculo.

   a) ¿A qué altura deberá cortarse para que el círculo que se forma ocupe un área de 10 cm^2?
   b) Dibuja el esquema que explica el problema y el resultado.

Comparen sus trazos de manera grupal y comenten sus procedimientos. Validen sus respuestas con la orientación de su profesor.

EJE FORMA, ESPACIO Y MEDIDA

TEMA Medida

Contenido

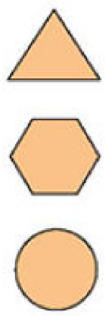
Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.

5.3. Desarrollo de fórmulas de volumen del cilindro y el cono

LO QUE SÉ

Resuelve de manera individual los siguientes planteamientos.

1. Relaciona cada uno de los polígonos con la expresión algebraica para calcular su área. Verifiquen sus respuestas con ayuda de su profesor.

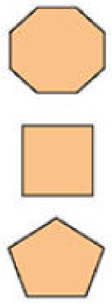


$A = (\pi)r^2$

$A = \frac{(P \times a)}{2}$

$A = \frac{b \times h}{2}$

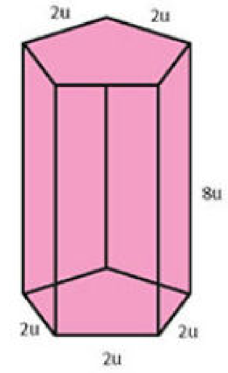
$A = L^2$



2. En el siguiente cuadro traza el desarrollo plano de un cilindro que tenga una altura de 6 cm y cuya base tenga un diámetro de 4 cm.

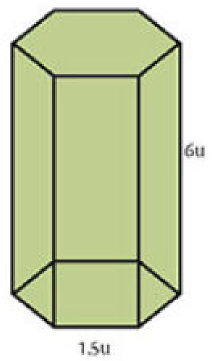
a) Intercambia tu libro con un compañero y revisen el desarrollo plano del otro. Comenten y verifiquen sus respuestas junto con el profesor.

3. Calcula el volumen de los siguientes prismas y describe tu procedimiento. Al finalizar compara tus resultados con los del compañero más cercano. En caso de tener diferentes resultados comenten los procedimientos que aplicaron.



a) Volumen: ____________________

Procedimiento: ____________________



b) Volumen: ____________________

Procedimiento: ____________________

CONSTRUYO

Responde las actividades de acuerdo con las indicaciones.

Actividad 1. En equipo, contesten las preguntas. Al finalizar, comenten con el grupo sus respuestas y la justificación para cada inciso.

a) Un prisma tiene una altura h. Si su base es un triángulo rectángulo isósceles que mide 6 cm en los lados iguales, ¿con cuál expresión algebraica se calcula su volumen?

____

b) Si un prisma tiene una altura a y su base es un cuadrado que mide 5 cm por lado, ¿con cuál expresión algebraica se calcula su volumen?

____

c) Un cuerpo geométrico tiene una altura f. Sus bases son pentágonos regulares que miden 4 cm por lado, ¿con cuál expresión algebraica se calcula su volumen?

____

d) Si un sólido tiene una altura e y sus bases son hexágonos regulares que miden 3 cm por lado, ¿con cuál expresión algebraica se calcula su volumen?

____

e) Si un sólido tiene una altura i y su base es un círculo de radio 5 cm, ¿con cuál expresión algebraica se calcula su volumen?

____

Actividad 2. Organícense en parejas. Construyan una columna circular con el material de su elección. Algunas opciones que les sugerimos son tapaderas de envases de vidrio (mermeladas, salsas, etc.), cartón o unicel. Al terminar, respondan las preguntas siguientes.

a) ¿Cuál es el volumen del cilindro que construyeron? ____________________

b) Describan, paso a paso, cómo obtuvieron el resultado del inciso anterior.

____

____

c) Presenten al grupo su columna y explíquenles a sus compañeros cómo calcularon el volumen de la misma.

Escuchen las dudas y comentarios de sus compañeros y validen sus procedimientos con apoyo de su profesor.

PARA TENERLO PRESENTE

Para calcular el volumen de un cilindro se usa el mismo procedimiento que para calcular el de un prisma, es decir, se multiplica el área de la base por la altura. En el caso del cilindro, la base es un círculo, de manera que el volumen se calcula así: $V = \pi r^2 h$.

Actividad 3. Reúnanse en equipos. Analicen las siguientes preguntas y respóndalas. Argumenten cada respuesta considerando la fórmula del volumen.

a) ¿Cómo cambia el volumen si el radio de la base se triplica? ______________

b) ¿Cómo cambia el volumen si la altura se triplica? ____________________

c) ¿Cómo cambia el volumen si la altura se triplica y el radio de la base se divide entre tres? ____________________________________

d) Revisen sus argumentos con ayuda de su profesor. Entre todo el grupo lleguen a una conclusión.

Actividad 4. Por parejas, consigan previamente el siguiente material: una cartulina y arena o azúcar. Con los materiales antes descritos, construyan un cono y un cilindro cuyas bases coincidan y sus alturas tengan la misma medida.

a) Utilizando el cono, llenen con la arena o con el azúcar el cilindro y contesten, ¿cuántos conos, necesitaron para llenar el cilindro? ____________________

b) ¿Cómo se relacionan matemáticamente el número de conos con el cilindro? Una vez que discutan su respuesta, anótenla. ______________________

____

c) Discutan sus razonamientos y elaboren una conclusión grupal con apoyo de su profesor. Al terminar, anótenla. ______________________________

____

Actividad 5. En equipo, calculen el volumen de las pirámides cuyos datos se dan en cada inciso. Al finalizar, comenten con el grupo sus resultados y procedimientos utilizados.

a) Base: Cuadrado de lado 10 cm
Altura: 10 cm
Volumen: ____________________________________

Procedimiento:

b) Base: Hexágono regular de lado 8 cm
Altura: 12 cm
Volumen: ____________________________________

Procedimiento:

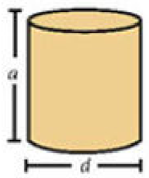
c) Base: Octágono regular de lado 6 cm
Altura: 8 cm
Volumen: ____________________________________

Procedimiento:

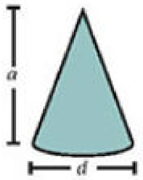
PARA TERMINAR

Resuelve lo siguiente de manera individual.

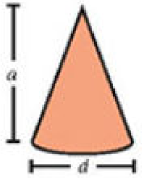
1. Escribe la expresión algebraica que sirve para calcular el volumen de un cono cuya base y altura coinciden con la de un cilindro que mide 15 cm de alto. Comenten con el grupo su procedimiento de resolución.



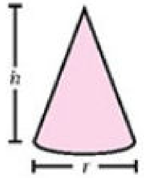
2. Se tiene un tanque de agua en forma de cilindro cuya altura es la misma que el diámetro de la base; se quiere modificar su diseño de tal manera que sea un cono cuya base sea la misma que la del cilindro. ¿Qué altura deberá alcanzar el cono para conservar el mismo volumen del cilindro?
Altura: ____________________



3. Escribe la expresión algebraica que sirve para calcular el volumen del cono de la izquierda. Al finalizar, compara tus resultados con los del compañero más cercano.
   a) Volumen: ____________________
   Expresión algebraica



   b) Volumen: ____________________
   Expresión algebraica



Contenido

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

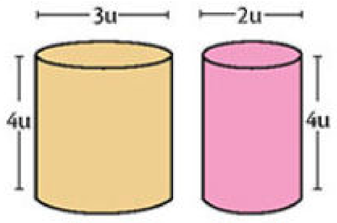
5.4. Cálculo del volumen de cilindros y conos

LO QUE SÉ

Responde los siguientes planteamientos de manera individual.

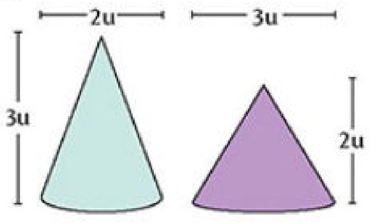
1. Observa cada pareja de sólidos y marca una ✔ en el paréntesis de la que tenga mayor volumen. Compara tu respuesta y argumentos de selección con los de tus compañeros.

a)



( ) ( )

b)



( ) ( )

2. En parejas, resuelvan los siguientes problemas, pero sin hacer operaciones escritas.

Teresa preparó agua de limón con chía para la fiesta familiar de hoy. El garrafón contiene 8 litros de agua y Teresa compró vasos cónicos de papel de 8 cm de diámetro por 9 cm de altura para los invitados. Con base en la información anterior, responde las siguientes preguntas.

a) ¿Para cuántos vasos alcanzará el agua que preparó Teresa? ____________
b) Si Teresa hubiera comprado vasos cilíndricos con las mismas dimensiones que las del cono, ¿tendría menor cantidad de agua que repartir? ¿Por qué? ________
____
____
c) ¿Con cuál vaso Teresa repartiría la mayor cantidad de agua de limón con chía? ¿Por qué? ____________________________________
____
____
d) Comparte tus razonamientos escritos y mentales con tus compañeros y comparen sus procedimientos. ¿Existe solo una forma de resolver el problema? Validen sus respuestas con ayuda de su profesor y establezcan una conclusión grupal.

CONSTRUYO

Organícense de acuerdo con las instrucciones de su profesor para resolver las siguientes actividades.

Actividad 1. En equipo, resuelvan las siguientes situaciones. Al terminar cada una, comparen sus resultados con los del equipo más cercano. Comenten en el grupo acerca de los procedimientos de solución utilizados.

En el consultorio escolar se rompió el recipiente que contenía el filtro del agua para beber; era cilíndrico y ahora se quiere sustituir por uno de forma cónica. El soporte del recipiente mide 40 cm de diámetro y se utilizará para el nuevo; también se requiere utilizar la misma cantidad de agua, es decir, 20 litros.

a) ¿Qué medidas tenía el recipiente que se rompió? ______
b) ¿Qué altura debe tener el recipiente cónico? ______
c) ¿Qué relación hay entre las medidas de ambos recipientes?

______

d) ¿Qué fórmulas sirven para calcular el volumen del cono y del cilindro?

______

Investigo

Investiga qué relación existe entre el área de un rectángulo y el volumen de un cilindro. Haz lo mismo con un triángulo rectángulo y un cono. Recuerda que tanto el cilindro como el cono son sólidos de revolución.

Actividad 2. Un juego de seis especieros de forma cilíndrica tienen la misma base y diferente altura; el más pequeño mide 6 cm de alto y la diferencia entre uno y el consecutivo es de 2 cm.

a) Considerando lo anterior, completa la tabla.

Altura (cm)	6		10			16
Volumen (cm^3)						

b) ¿De qué manera se puede calcular el volumen de esos envases sin recurrir a la fórmula? ______
c) Si los recipientes fueran cónicos con el mismo volumen y base que los cilíndricos, ¿qué altura les correspondería? Completen la tabla.

Altura (cm)						
Volumen (cm3)						

d) Comenten con otro equipo sus procedimientos y revisen las respuestas. Corrijan lo que sea neceario.

Recuerda que...

El *volumen* de un objeto es el espacio que ocupa. Algunos sólidos tienen formas sencillas y su volumen puede calcularse midiendo sus dimensiones y aplicando lo que has aprendido hasta ahora.

Actividad 3. Reunidos en equipos, lean el problema siguiente y propongan cómo resolverlo.

Don Ángel construyó un pozo de forma cilíndrica que mide 5 m de diámetro y 10 m de profundidad. Requiere construir un segundo pozo con la misma capacidad, pero las condiciones del suelo solo le permiten una profundidad de 8 metros.

a) En sus cuadernos, esquematicen el planteamiento del problema.
b) ¿Cuál es la fórmula para determinar las medidas del nuevo pozo, considerando que la capacidad debe ser la misma que la del anterior?

______

c) ¿Qué medidas debe tener el segundo pozo?

______

d) Si se construyera el nuevo pozo con el mismo diámetro del primero, pero con la profundidad de 8 m, ¿de cuántos litros sería su capacidad?

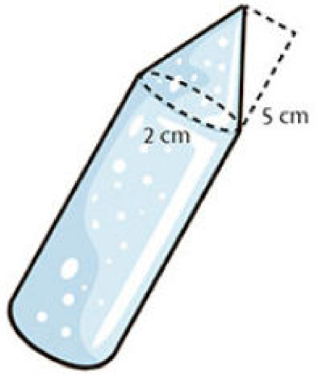
______

e) Compartan sus procedimientos ante el grupo y validen sus respuestas con apoyo de su profesor.

PARA TERMINAR

Resuelve las siguientes situaciones de manera individual. Desarrolla los procedimientos en tu cuaderno.

1. En el taller de Judith se fabrican recipientes para llenarse de gel con brillos. En esta ocasión le encargaron un recipiente en forma de lápiz con punta, el diámetro es de 2 cm y la punta de 5 cm de alto, para almacenar 40 ml de gel color azul.



a) Calcula la altura del cuerpo del lápiz. ______
b) Calcula el volumen que tendrá la punta. ______
c) Calcula el volumen del cuerpo del lápiz. ______

Comparen sus respuestas y argumentos, y revisen sus procedimientos. Con ayuda de su profesor, validen sus respuestas y corrijan en caso de ser necesario.

2. Durante un maratón se consumieron 250 garrafones de agua de 20 litros cada uno. Para cada toma se utilizaron conos de 3 cm de radio y 9 cm de altura.
a) Aproximadamente, ¿cuántos conos se utilizaron? ______
b) ¿Cuántos conos de agua se requieren para beber aproximadamente dos litros de agua? ______

Recuerda que...

1 cm^3 es equivalente a 1 ml
1 dm^3 es equivalente a 1 litro

3. Tengo un envase en forma de cono con un volumen de 160 cm^3; la base mide 8 cm de diámetro. Quiero un cono de 5 cm de radio pero que ocupe el doble de volumen.
a) ¿Cuánto debe medir de altura?

______

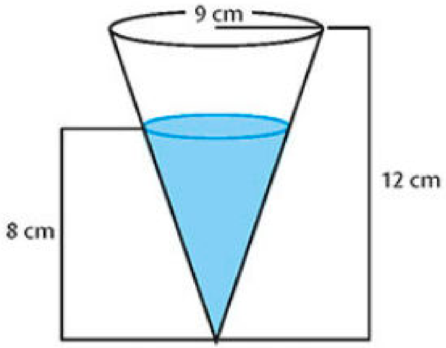
Aplicación

Los fabricantes de alimentos enlatados deben saber detalladamente qué cantidad de alimentos cabe en una lata. De otra manera, los costos de producción podrían presentar errores y la empresa puede, incluso, ir a la quiebra. Para evitar esto, es necesario que sepan la forma de la lata, el volumen que puede contener y calcular los costos.

b) Una vez que tengas las medidas del cono, dibuja en el espacio siguiente el aspecto que debería tener cada recipiente.

c) Revisa con otro compañero las respuestas. Comparen y argumenten sus procedimientos. Recurran a su profesor para despejar dudas.

4. ¿Cuánta agua cupo en un cono de 12 cm de alto y 9 cm de radio si solo lo llené hasta los 8 cm de altura?
   a) Argumenta tu respuesta.
   b) Valida tu respuesta con ayuda de tu profesor.



Glosario

Silo. Almacén de semillas en forma cilíndrica.

5. Después de un desastre natural, en el pueblo de San Jacinto recibieron algunos camiones que llevaron frijol. El total de este grano se puede guardar perfectamente en 20 recipientes cilíndricos cuyas medidas son de 3 m de radio por 3 m de altura; lamentablemente, en el pueblo solo tiene 12 de estos depósitos; sin embargo, también existen 25 silos cuya capacidad es de 56.5 m^3.
   a) ¿Son suficientes los silos para almacenar las semillas sobrantes? Argumenta tu respuesta. ______________________
   b) ¿Faltan o sobran silos? Argumenta tu respuesta.
   c) Verifica tus procedimientos con apoyo de tu profesor.

5.5. Análisis de situaciones problemáticas asociadas con otras disciplinas

Contenido

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

LO QUE SÉ

Responde las preguntas de acuerdo con lo que se indique.

1. En el siguiente espacio dibuja una gráfica lineal y al lado una gráfica cuadrática.
   a) Explica las diferencias hay entre las gráficas del inciso anterior.

Gráfica lineal	Gráfica cuadrática

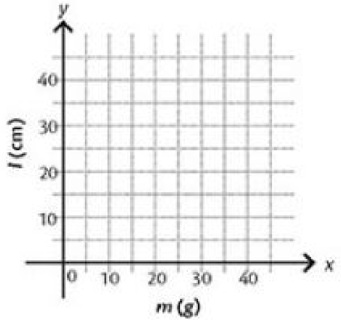
   b) Revisa tus respuestas con el grupo y valídalas con tu profesor.

Recuerda que...

Los datos obtenidos en un experimento se pueden representar en una gráfica, habitualmente en un plano cartesiano, y es útil encontrar la relación que guardan entre sí los datos que surjan al momento de hacer el experimento.

2. Se cuelga de manera vertical un resorte de 23 cm de longitud. Los resultados se presentan en la tabla siguiente, y corresponden a la elongación del resorte al colocar masas diferentes, cada vez más pesadas, en su extremo libre.

Masa colgada m (g)	Elongación del resorte l (cm)
0	23
15	35
20	39
25	43
30	47
35	51



Traza en el plano cartesiano de la derecha la gráfica correspondiente.

Glosario

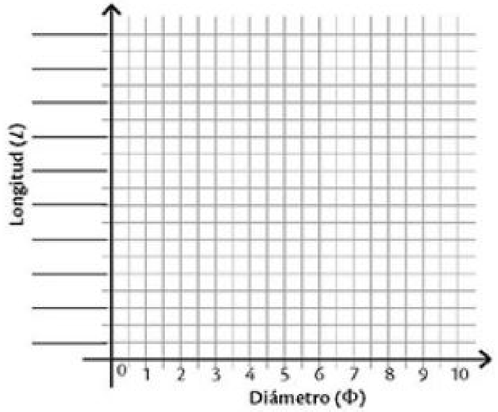
Elongación. Extensión de una pieza sometida a dos fuerzas opuestas que tienden a estirarla.

CONSTRUYO

Reúnanse en equipos para llevar a cabo las siguientes actividades.

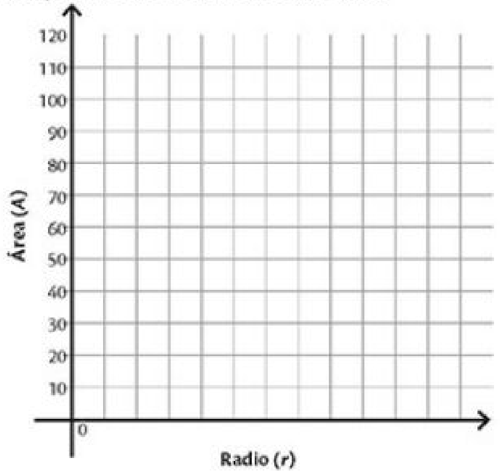
Actividad 1. Completen las siguientes tablas referidas a la circunferencia y al área de un círculo. Tracen las gráficas correspondientes.

Diámetro (Φ)	Longitud (L)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	



a) Escriban la expresión algebraica para el cálculo de la circunferencia:

Radio (r)	Área (A)



b) Escriban la expresión algebraica para el cálculo del círculo: ________________

c) Con los datos de las tablas y las gráficas que elaboraron, contesten: ¿qué tipo de función les corresponde (lineal o cuadrática)? Justifiquen su respuesta.

d) ¿Qué diferencia hay entre la gráfica de la circunferencia y la del área del círculo? Justifiquen su respuesta. ________________

e) Revisen sus argumentos junto con el resto del grupo y coméntenlos. Apóyense de su maestro para validar sus respuestas y llegar a una sola conclusión.

Actividad 2. Una alberca tiene capacidad para 50 000 litros de agua y la tubería que la llena lo hace con un flujo de 15 litros por minuto en época de lluvia y de 9 litros por minuto en el resto de los meses.

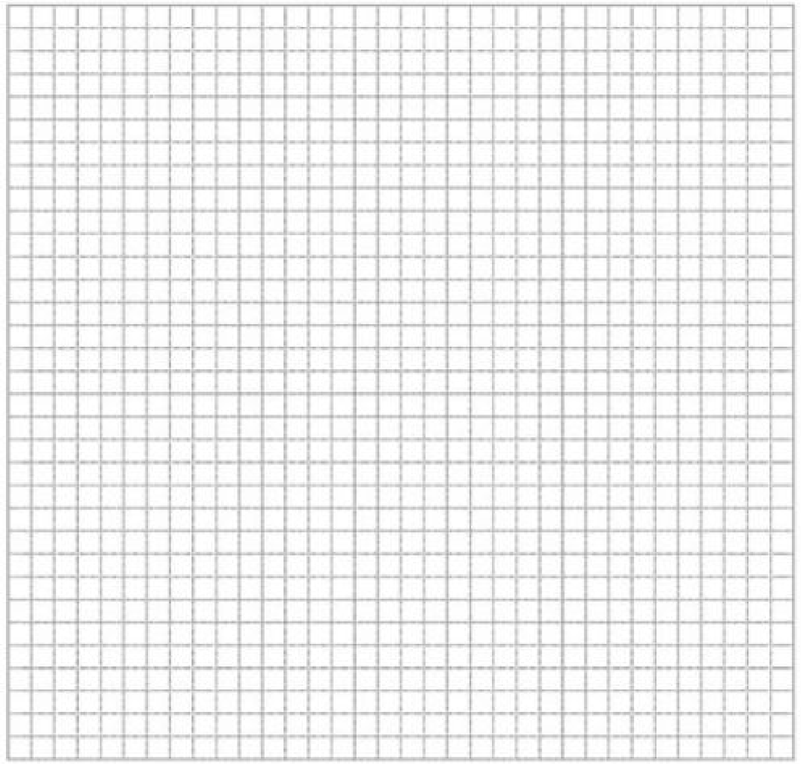
a) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse completamente la alberca en temporada de lluvia? Justifiquen su respuesta. ________________

b) ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse en temporada de sequía? Justifiquen su respuesta. ________________

c) ¿Cuál es la ecuación que modela la velocidad de llenado de la alberca para cada temporada? Justifiquen su respuesta. ________________

d) En su cuaderno, tabulen los datos del llenado de la alberca.

e) Tracen la gráfica del llenado de la alberca para cada temporada, con un color distinto, y comparen ambas gráficas.



f) Comparen con el grupo sus respuestas y comenten acerca del procedimiento utilizado para la solución. Si encuentran diferencias, analicen las razones e identifiquen si existen errores. De ser así, corríjanlos.

Actividad 3. En un laboratorio se trabaja con un cultivo de bacterias que incrementará la calidad del suelo para uso agrícola. En condiciones controladas las bacterias se reproducen a razón de 2.5 millones de unidades (MDU) por día; la población inicial de bacterias tenía un tamaño de 9 MDU.

a) ¿Cuántas bacterias habrá en 20 días? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que describe el número de bacterias en cualquier día? Justifiquen su respuesta.

c) En sus cuadernos, llenen tablas con los datos que les permitan graficar el crecimiento de las bacterias.

d) Tracen la gráfica de la función que modela el crecimiento de bacterias.

e) ¿Cómo se puede identificar una función cuadrática a partir de su gráfica? Justifiquen su respuesta.

f) Compartan sus respuestas con los demás equipos y escuchen los argumentos de cada uno. Con ayuda de su profesor, establezcan una conclusión grupal.

Recuerda que...

Para resolver una ecuación cuadrática o de segundo grado, podemos utilizar al menos tres procedimientos: método gráfico, factorización y fórmula general.

PARA TENERLO PRESENTE

Con las matemáticas podemos representar fenómenos que ocurren en la vida diaria y estudiarlos; la proporción entre variables de un fenómeno puede ser una *variación lineal*; ambas representaciones se pueden graficar en el plano cartesiano. Muchos fenómenos se modelan con una representación lineal, por ejemplo, los trayectos con velocidad constante, el estiramiento de un resorte al aplicarle una fuerza o colocarle un peso, la cantidad de agua que sale por un grifo en un determinado tiempo, la inyección de combustible que se requiere para hacer funcionar una máquina, etcétera.

PARA TENERLO PRESENTE

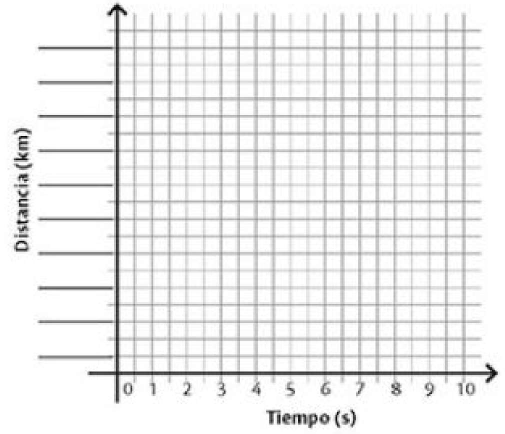
Algunos fenómenos se pueden modelar con una representación cuadrática, por ejemplo: el crecimiento de las plantas, la trayectoria de una bala, la altura de un objeto que se lanza, la variación en área al cambiar las medidas de objetos de forma cuadrada, etcétera.

Actividad 4. ¿Has observado que cuando lanzan fuegos artificiales primero se ven las luces de colores y después se escucha el sonido de la explosión? Esto sucede porque la luz viaja en el espacio a 300 000 km/s y el sonido lo hace con una velocidad mucho menor: 300 m/s.

a) ¿Qué distancia recorre la luz después de 10 s?

b) Para hacer más fácil el cálculo, llena la siguiente tabla y grafica en la cuadrícula.

Tiempo (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distancia (km)	300000									



Investigo

Investiga cuál es la distancia entre el Sol y la Tierra y calcula cuánto tiempo tiene que viajar la luz en el espacio para llegar hasta nuestro planeta.

c) ¿Qué tipo de gráfica resultó (lineal o cuadrática)? Justifica tu respuesta.

d) ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el fenómeno anterior tomando como referencia la velocidad de la luz? Justifica tu respuesta.

e) ¿Es necesario trazar la gráfica para poder determinar si la relación en un fenómeno es lineal o cuadrática? Justifica tu respuesta.

f) Comparen en grupo el resultado y el procedimiento utilizado, y validen sus respuestas con apoyo de su profesor.

PARA TERMINAR

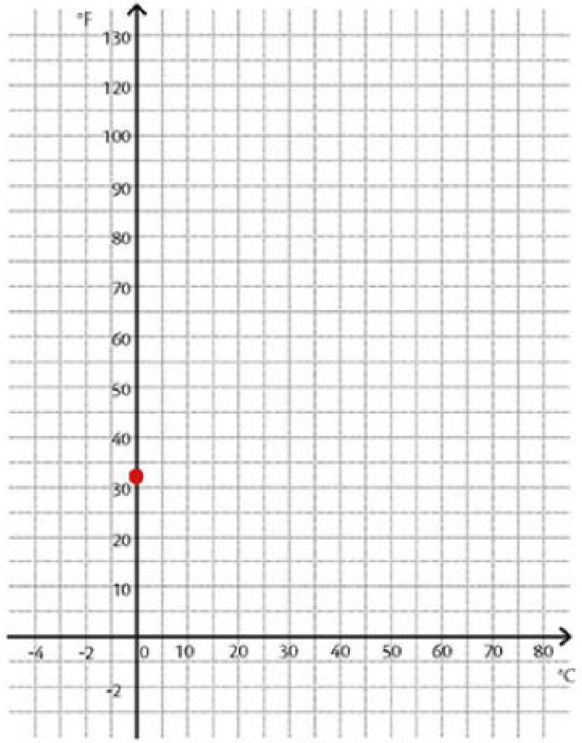
Resuelve de manera individual lo siguiente.

1. Para medir la temperatura se utilizan termómetros graduados en escala Celsius (°C) o Fahrenheit (°F). Para pasar de una escala a otra podemos utilizar la expresión algebraica: $°F = \left(\frac{9}{5}\right)(°C) + 32$

   a) Con la ecuación anterior completa la tabla para las distintas temperaturas. Al finalizar, compara tus resultados con los que obtuvo el compañero más cercano. Comenten acerca de los procedimientos de solución.

   b) Grafica con base en los valores de la tabla anterior. Compara tu gráfica con la del compañero de al lado y comenten si la forma de la gráfica corresponde con el tipo de ecuación.

Celsius (°C)	Fahrenheit (°F)
-25	-13
-20	-4
-15	5
-10	14
-5	23
0	32
5	
10	
15	
20	
25	
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	



   c) De acuerdo con la información de la tabla, la gráfica y la función correspondiente, ¿cuántos grados Celsius equivalen a 48 °F? ______

   d) Se sabe que al nivel del mar, el agua llega a su punto de ebullición a los 100 °C, si tienes un termómetro que solo tiene medidas en grados Fahrenheit, ¿cuánto deberá marcar el termómetro cuando el agua empiece a hervir? Justifica tu respuesta. ______

   e) Un alimento se cuece en un horno a una temperatura de 410 °F por un periodo de 45 min. ¿Qué temperatura, en °C, corresponde al horno para cocinar el mismo alimento en el tiempo señalado? Justifica tu respuesta. ______

   f) En tu cuaderno, haz otra gráfica pero invierte los ejes, es decir, coloca los grados Fahrenheit (°F) en el eje de las abscisas y los grados Celsius (°C) en el de las ordenadas. ¿Se forma el mismo tipo de gráfica? ______

Revisa tus respuestas junto con tu profesor. Escucha los argumentos de tus compañeros y lleguen a conclusiones grupales para cada pregunta.

2. Al famoso matemático John von Neumann se le planteó el siguiente problema: Dos muchachos andan en bicicleta a 20 km de distancia entre ellos y se mueven en sentido contrario para encontrarse. En el momento en que comienzan a moverse, una mosca que está en el volante de una de las bicicletas empieza a volar hacia el otro ciclista. En cuanto llega al otro volante, da la vuelta y vuela de regreso al primero. La mosca voló ida y vuelta de volante a volante hasta que los dos ciclistas se encontraron. Si cada ciclista recorrió el camino con una velocidad constante de 10 km/h, y la mosca voló a una velocidad constante de 15 km/h, ¿qué distancia recorrió la mosca?

   a) ¿Cuál es la solución del problema? Justifica tu respuesta. ______

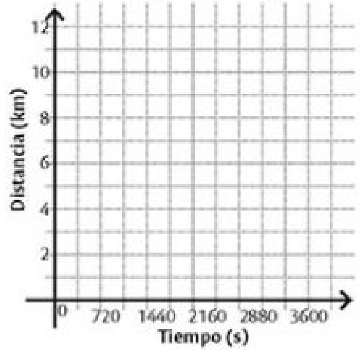
   b) Construye una tabla de valores para cada ciclista y para la mosca. Considera que dicha tabla debe incluir distancia y tiempo.

Ciclista	
Tiempo (s)	Distancia (km)

Mosca	
Tiempo (s)	Distancia (km)

   c) Considerando que la velocidad de la mosca y de los ciclistas fue constante, ¿qué tipo de gráfica (lineal o cuadrática) resulta? Justifica tu respuesta. ______

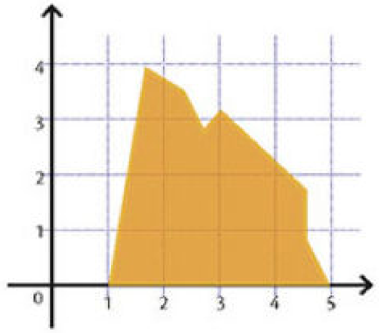
d) Traza la gráfica de ambos ciclistas en la cuadrícula.



e) Valida tus respuestas y gráficas junto con tu profesor.

3. Para construir una carretera se lanza un proyectil hacia el lado más alto de una montaña. Se sabe cuáles son las dimensiones de la montaña y que el proyectil llegará a su objetivo durante la caída. La altura *h* que alcanzará el proyectil y la distancia horizontal *R* que recorrerá se pueden determinar con la función $y = -3x^2 + 7x$.
En la gráfica aparece la montaña. Completa los valores de la tabla para graficar la trayectoria del proyectil.

R	*h*
0	0
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	



a) ¿En qué coordenadas el proyectil logra impactar a la montaña? ____________

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil antes de comenzar a descender hacia su objetivo? ____________

c) ¿Qué tipo de trayectoria sigue el proyectil? ____________

d) ¿Qué tipo de ajuste se hace con la gráfica del proyectil: lineal o cuadrático? ____________

e) ¿Cuál es la diferencia entre la representación gráfica de una función lineal y una función cuadrática? ____________

f) ¿Qué sucedería con la trayectoria del proyectil si cambiamos los valores en la ecuación que lo modela? Prueba con otros valores y grafícalos en tu cuaderno. ____________

e) En plenaria, revisen las respuestas de cada planteamiento. Comenten sus razonamientos y argumenten sus procedimientos. Corrijan lo que sea necesario y consulten las dudas que tengan a su profesor.

EJE **MANEJO DE LA INFORMACIÓN**

TEMA Nociones de probabilidad

5.6. Los juegos de azar más famosos del mundo

Contenido

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

LO QUE SÉ

Responde de manera individual los siguientes planteamientos.

1. Quiero participar en un juego de lotería. Para ganar hay dos opciones:

Opción 1	Opción 2
Sacar al azar, a la primera oportunidad, el billete premiado que se encuentra en una urna junto con otros nueve billetes.	Sacar al azar, en diez oportunidades, diez billetes premiados que se encuentran junto con otros 90 sin valor.

a) Mis compañeros dicen que en cualquiera de las dos opciones tengo la misma probabilidad de ganar, ¿es cierto? Argumenta tu respuesta. ____________

b) ¿Existe una opción mejor que la otra? ¿Por qué? ____________

c) Compartan con el grupo sus respuestas y lleguen a una respuesta común, con ayuda de su profesor.

2. Lee el siguiente texto y responde las preguntas. Compara tus respuestas con las del compañero más cercano y comenten acerca de los procedimientos utilizados en su solución. Por último, con ayuda de su profesor, validen sus respuestas.

Los juegos de azar más famosos del mundo

El *bingo* es originario de Italia, consiste en una tómbola que contiene un número de esferas numeradas; usualmente entre 75 y 90. Cada jugador tiene un cartón con números impresos en él, que corresponden a las esferas numeradas de la tómbola, es decir, del 1 al 75 o del 1 al 90. Un *gritón* va sacando las esferas de la tómbola una por una frente a todos y *cantando* los números en voz alta. Si un jugador tiene el número en cuestión en su cartón lo marca y el juego continúa así hasta que alguien completa todos los números de un renglón o del cartón.

Aplicación

En algunas ciudades está autorizada la operación de los casinos, en estos sitios las personas apuestan su dinero en juegos denominados *de azar*. En estos siempre existe cierta probabilidad de que el jugador pueda ganar alguna vez, aun cuando la mayoría de las veces sea el casino el ganador.

¿Sabías que...

Dependiendo del país, el juego de volados tiene diversos nombres? En Argentina, cara o ceca; en Chile, Panamá y Venezuela, cara o sello; en el Salvador, cara o corona; en Ecuador, España y Puerto Rico, cara o cruz; en Honduras, cara o escudo; en Paraguay, cara o número.

Los *volados* son un juego que consiste en lanzar al aire una moneda. En México se suele escoger la cara que creemos caerá boca arriba como águila o sol, haciendo alusión a las viejas monedas en las que aparecían el escudo nacional de un lado y un sol del otro.

El juego de los dados consiste en lanzar un dado de seis caras sobre una superficie horizontal. Los posibles resultados están marcados en cada una de las caras del dado y se escogen tomando el resultado marcado en la cara que queda con la vista hacia arriba. Como el dado más usado tiene seis caras la probabilidad de obtener un número de los seis es de 1/6, es decir, un 16.67%. Si en vez de usar un dado lanzamos dos, entonces la probabilidad de sacar una pareja específica se reduce a 2.77%.

a) En el caso del bingo, si se elige el juego con las esferas numeradas del 1 al 90, ¿cuántos cartones diferentes con 15 números se pueden hacer?

b) Cuando se juega con una moneda hay dos resultados posibles. ¿Cuál es la probabilidad de ganar al lanzar una moneda?

c) En el juego de los dados, la probabilidad de obtener un número de los 6 es de 1/6, es decir, 16.67%. Si en lugar de usar solo un dado lanzamos 2, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea (3, 3)?

d) Investiga qué significa que en un juego de dados, los dados estén *cargados*.

e) Investiga qué significa que en un juego de cartas, las cartas estén *marcadas*.

f) ¿Cómo afectan los dados cargados o las cartas marcadas al azar del juego?

g) ¿Las condiciones que se dan para ganar en los juegos arriba descritos son justas para todos los jugadores? Justifica tu respuesta.

h) ¿Los volados se pueden considerar un juego de azar? Justifica tu respuesta.

i) ¿Es equiprobable ganar en los volados? Justifica tu respuesta.

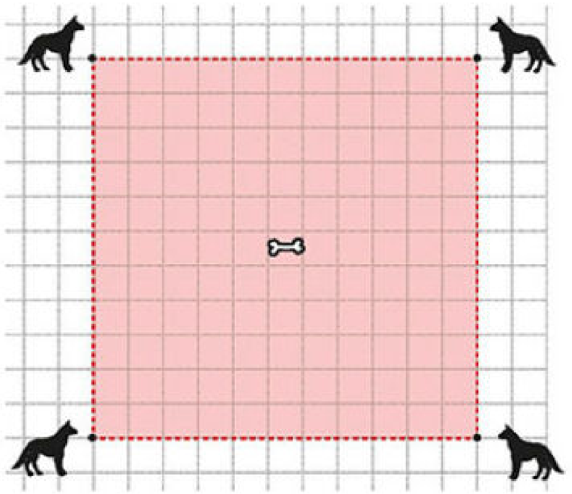
CONSTRUYO

Reúnanse en equipos para resolver los siguientes planteamientos.

Recuerda que...

Los juegos de azar son aquellos en los que las condiciones para obtener un ganador no dependen solo de la habilidad o capacidades que el competidor tenga, sino de las probabilidades que el juego otorga, es decir, del azar o la suerte.

Actividad 1. Cada año en la feria de San Miguel de los duraznos se pone un puesto con diversos juegos de azar. Uno de ellos llamado "Los perros y su hueso" utiliza un tablero como el siguiente:



Las instrucciones del juego son:

- Pueden participar de dos a cuatro jugadores.
- Cada jugador deberá aportar $ 5 en la caja para poder participar.
- Cada jugador debe comenzar desde una esquina del tablero, en el punto marcado.
- Para desplazarse a través del tablero es necesario lanzar una moneda por turnos. Si sale *sol* no avanza; si sale *águila* se avanza una casilla en diagonal, hacia el hueso.
- El jugador que llegue primero al hueso, gana.

El premio se otorga como sigue:

- Si participaron dos jugadores, el ganador obtiene $7.50
- Si participaron tres o cuatro jugadores el ganador obtiene $10.

a) ¿Todos los participantes tienen las mismas probabilidades de ganar? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Qué probabilidad tiene cada jugador de ganar? Justifica tu respuesta.

c) ¿Las reglas del juego promueven que sea igual de probable ganar para todos los participantes? Justifiquen su respuesta.

d) ¿El premio es justo? Justifiquen su respuesta. ______

e) ¿Qué pasa con el resto del dinero recaudado que no se entrega al ganador? Justifiquen su respuesta. ______

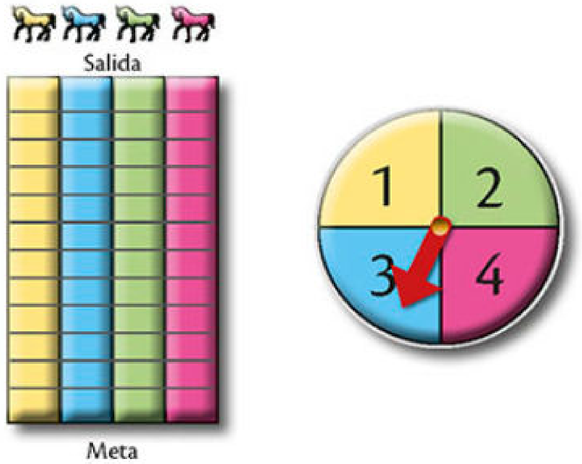
f) Comparen sus respuestas y razonamientos con otro equipo. Argumenten sus procedimientos y consulten sus dudas con el profesor.

Recuerda que...

Al utilizar la escala de la probabilidad como punto de referencia para la comparación de dos eventos y poder determinar cuál es más probable que otro, se tiene la posibilidad de conocer las condiciones de triunfo que existen antes de comenzar a jugar.

Actividad 2. Analicen lo siguiente y contesten las preguntas. Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos.

En otro de los juegos se presentaba la "Carrera de caballos" y se contaba con un tablero y una ruleta, como estos:



Las instrucciones decían:

- Pueden jugar de dos a cuatro jugadores.
- Se comienza desde el punto marcado en la salida para cada jugador y se elije un número para participar.
- Se gira una ruleta, numerada del 1 al 4 con divisiones que tienen la misma área.
- Avanza una casilla el jugador del número que resulte en la ruleta.
- El jugador que llegue primero a la meta, gana.

Recuerda que...

Uno o más eventos son *equiprobables* cuando los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar. Si esto sucede, podemos decir que el juego es justo.

Respondan:

a) ¿Hay algún caballo que tenga mayores probabilidades de ganar? Justifiquen su respuesta. ______

b) ¿Cuál es la probabilidad real de cada uno de los caballos de ganar? Justifiquen su respuesta. ______

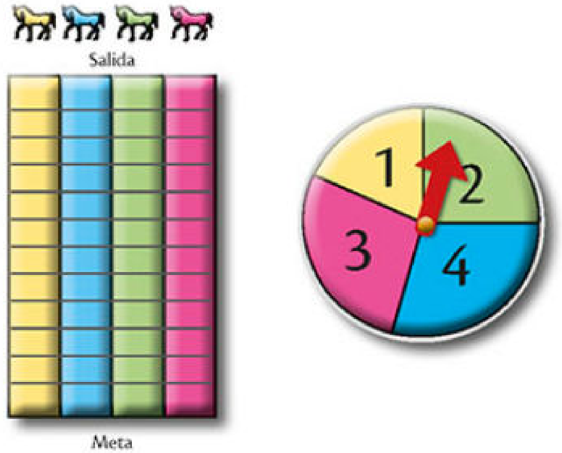
c) ¿Podemos considerar que las reglas son justas para todos los participantes? Justifiquen su respuesta. ______

d) Comparen sus respuestas y razonamientos con otro equipo. Argumenten sus procedimientos y consulten sus dudas con el profesor.

Actividad 3. Analicen el texto siguiente y contesten. Comenten en el grupo las respuestas y argumenten al respecto. En caso de ser necesario, corrijan sus respuestas.

En otro puesto de la feria hay una versión diferente del juego "Carrera de caballos". Las instrucciones son:

- Participan cuatro jugadores.
- Se comienza desde el punto marcado en la salida para cada jugador y se elije un número para participar.
- Se gira una ruleta numerada del 1 al 4, (como la que se muestra) y avanza una casilla el jugador del número que resulte en la ruleta.
- Cuando algún jugador llegue a la meta, gana.



a) ¿Hay algún caballo que tenga mayor probabilidad de ganar? Justifiquen su respuesta. ______

b) ¿Las reglas del juego son justas para los participantes al jugar con esta ruleta? Justifiquen su respuesta. ______

c) De acuerdo con tu respuesta anterior, ¿cuáles serían las condiciones para que un juego sea justo? Anótalas en las siguientes líneas. ______

Actividad 4. Analicen el siguiente planteamiento y respondan las preguntas. Al terminar, compartan sus argumentos con el resto del equipo y lleguen a una conclusión con ayuda de su profesor.

En otro puesto de la feria también estaba el juego de Lotería tradicional mexicana. Las reglas del juego son las siguientes:

- Participan cuatro jugadores.
- Para poder participar es necesario aportar $ 1.
- Al ir nombrando las cartas, cada jugador tiene oportunidad de ganar con solo una de las opciones:

  a) Si completa cualquier línea horizontal, vertical o diagonal.
  b) Si completa solo las esquinas (completando las cuatro casillas que se localizan en las esquinas).
  c) Si llena la tabla por completo.
  d) Si completa 10 figuras, independientemente de su ubicación.

- Para seleccionar la opción de participación es necesario un sorteo entre los jugadores, no pueden haber dos jugadores con la misma opción.
- El ganador del premio es aquel que cumpla en primer lugar con la opción elegida.

a) ¿Cuál de las cuatro opciones tiene mayor probabilidad de ganar? Justifiquen su respuesta. ____________________

b) En caso de considerar que el juego no presenta igual probabilidad para todos los participantes, ¿qué reglas tendrían que modificarse para que el juego fuera justo? Argumenten su respuesta. ____________________

____

c) ¿La distribución del premio es justa? Justifiquen su respuesta. ____________________

PARA TENERLO PRESENTE

Las condiciones para que el juego de azar sea justo son:

En cada jugada, o en el juego completo, la probabilidad de ganar para cada participante debe ser exactamente la misma, por tanto, para reconocer si el juego es o no justo, debemos calcular la probabilidad que se tiene de ganar en el juego.

En caso de que las probabilidades de ganar sean diferentes para algún participante, debemos considerar que el participante que tenga menor probabilidad debe obtener un premio proporcionalmente mayor, con la intención de compensar su escasa probabilidad de triunfo.

Es muy importante establecer que las reglas o las condiciones del juego no favorezcan bajo ninguna circunstancia a alguno de los participantes.

PARA TERMINAR

Responde las preguntas de manera individual. Al terminar, valídalas con apoyo de tu profesor y compañeros.

1. Esta es la imagen de una ruleta americana clásica.

¿Sabías que...

El juego de la ruleta debe su origen a Blaise Pascal? En sus orígenes, la ruleta sólo tenía 36 números, pero a finales del siglo XIX, los hermanos Blanc la modificaron y le añadieron el 0. Esta ruleta cuenta con una proporción de premios de 36/37, lo cual hace que el casino pueda ganar un porcentaje de 2.7% (en Europa) o de 5.2% (en EU) y la diferencia radica en si la ruleta tiene o no dos ceros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se apuesta que el balín caerá en algún número que se encuentra en una casilla roja? Justifiquen su respuesta. ____________________

____

____

b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se apuesta que el balín caerá en algún número par? Justifiquen su respuesta. ____________________

____

____

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se apuesta que el balín caerá en el cero o el doble cero? Justifiquen su respuesta. ____________________

____

____

d) ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se apuesta que el balín caerá en algún número en particular? Justifiquen su respuesta. ____________________

____

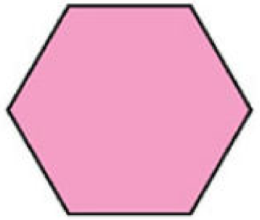
e) ¿Son justas las reglas de la ruleta para todos los que juegan?, ¿alguien tiene ventaja sobre los demás? Justifiquen su respuesta. ____________________

____

f) Compartan sus respuestas y razonamientos con otro equipo. Argumenten sus procedimientos y consulten sus dudas con el profesor.

I. Selecciona la respuesta correcta. Al finalizar, revisa con tu grupo las respuestas.

1. ¿Cuánto mide, en centímetros cuadrados, el área del siguiente polígono regular? Su apotema mide 5.19 cm.



a) 15.5 c) 60.1

b) 35.4 d) 120.5

2. Ramiro fue al mercado y compró 3 kg de jitomates y 2 kg de cebollas, por los que pagó \$40.50. Su mamá lo volvió a enviar para comprar 2 kg de jitomates y $\frac{1}{2}$ kg de cebollas, por esto pagó \$22.00, ¿cuál fue respectivamente el precio de cada artículo?

a) \$6.50 y \$10.50 c) \$8.50 y \$10.00

b) \$7.50 y \$9.00 d) \$9.50 y \$6.00

3. Maricruz recibió de aguinaldo el triple de lo que le pagaron por todo el mes de enero. Si de sueldo de enero y aguinaldo recibió en total \$31 280.00, ¿cuánto cobra por quincena?

a) \$10 426.66 c) \$5 213.33

b) \$7 820.00 d) \$3 910.00

4. El área de un terreno rectangular de 59.84 m², se expresa algebraicamente como $x^2 + 6x + 8$. ¿Cuánto mide el terreno?

a) 4 m y 14.96 m c) 6.4 m y 9.35 m

b) 4.8 m y 10.8 m d) 6.8 m y 8.8 m

5. Se hace un corte paralelo a la base de un cono de 15 cm de altura y 5 cm de radio de la base. Si el cono queda con 12 cm de altura, ¿qué área, en centímetros cuadrados, ocupa su base?

a) 4π c) 9π

b) 8π d) 16π

6. Considerando a $\pi = 3.14$, calcula, en centímetros, el radio de la base de un cono de 10 cm de altura que ocupa un volumen de 376.8 u³.

a) 3 c) 9

b) 6 d) 18

7. Dentro de un invernadero se construirán dos depósitos, ambos con un diámetro de 6 m; uno en forma cilíndrica para las hortensias y el otro en forma cónica para las gladiolas. Ambos deben tener el mismo volumen en metros enteros y no sobrepasar la altura del recinto que es de 3 m. El volumen de cada depósito es:

a) 9 m³ c) 84.78 m³

b) 28.26 m³ d) 113.04 m³

8. Para el último mes de cursos se alquilaron tres proyectores, por el primero hay que pagar \$500 de renta y \$5 por cada hora que la lámpara esté encedida; por el segundo, hay que pagar \$400 de renta y \$6 por cada hora de uso de lámpara, y por el tercero hay que pagar \$8 por cada hora de uso de lámpara. ¿Cuáles son las expresiones algebraicas que corresponden al pago que se debe hacer, dado el número de horas de uso de lámpara?

I. Proyector 1 A. $c = 8$ B. $c = 400 + 6h$

II. Proyector 2 C. $c = 500 + 5h$ D. $c = 8h$

III. Proyector 3 E. $c = 406 + h$ F. $c = 505 + h$

a) (I, F), (II, B), (III, D) c) (I, F), (II, E), (III, A)

b) (I, C), (II, E), (III, A) d) (I, C), (II, B), (III, D)

9. En un juego de azar participan dos jugadores y se usan dos dados, ¿con cuál condición el juego se considera justo?

a) Gana el jugador 1 si la suma de los dados es menor que 7.

b) Gana el jugador 2 si la suma de los dados es mayor que 7.

c) Gana el jugador 1 si la suma de los dados es par.

d) Gana el jugador 2 si la suma de los dados es 7.

Registro mis avances

Tema	Problema	Aciertos	En esta sección marca tu nivel de aprendizaje alcanzado en cada tema. Considera las observaciones de tu profesor			
			Requiero de total apoyo	Necesito practicar	Casi lo domino	Óptimo
Patrones y ecuaciones	1, 2, 3, 4, 8					
Figuras y cuerpos	6, 7					
Medida	5					
Nociones de probabilidad	9					
Mi total de respuestas correctas			Mi porcentaje de respuestas correctas			

Escribe qué puedes hacer para mejorar tu aprovechamiento y sugiere qué tipo de apoyos requieres.

Esta es la última sección del libro en la que tendrás oportunidad de aplicar las habilidades adquiridas y las que has desarrollado a lo largo del curso.

Como te hemos comentado en bloques anteriores, esta sección puedes resolverla de manera individual, pero si la llevas a cabo en equipo tendrás una experiencia más enriquecedora. Así que organízate como prefieras y pon manos a la obra.

Una de las partes más importantes de este trabajo y de las competencias que debes demostrar haber desarrollado es la de poder comunicar información matemática, por lo que es muy importante que compartas los procedimientos de solución a los que llegues, las dificultades que tuviste para resolver cada parte de esta sección y las dudas que surgieron o, quizá, todavía tengas.

Siempre que lo necesites, apóyate de tu profesor. Él guiará tu trabajo y, con su experiencia, te ayudará a aclarar tus dudas y a concluir con base en tus propias ideas.

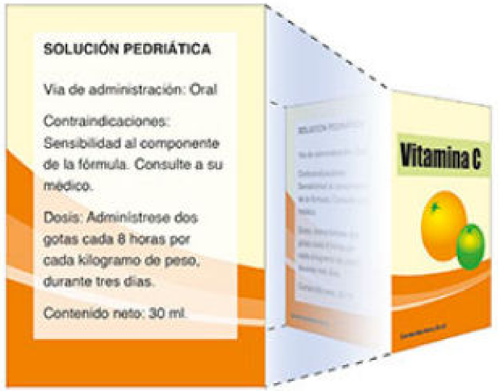
Medicina y matemáticas

Cuando pensamos en las aplicaciones de las matemáticas generalmente vienen a nuestra mente temas de ingeniería, arquitectura y física, pero las matemáticas también son útiles para atender la salud. Cuando asistimos a consulta, generalmente el doctor determina qué cantidad de medicamento debemos consumir para reestablecer nuestra salud. Los medicamentos tienen indicaciones generales en el empaque que es necesario atender.

1. Organizados en equipo, contesten las siguientes preguntas en su cuaderno y compártanlas con el grupo. Si desconocen las respuestas, investíguenlas.

   a) ¿Qué es un medicamento?
   b) ¿Qué es la dosis?
   c) ¿Cómo se determina?
   d) ¿Quién establece la dosis?

2. Ahora, lean la información del instructivo del siguiente medicamento. Contesten en su cuaderno las preguntas, justifiquen sus respuestas y lleven a cabo lo que se señala.



   a) ¿ Se sabe para qué padecimiento se administra el producto?
   b) ¿A qué edades de la población se destina este medicamento?
   c) Elaboren una tabla y una gráfica en la que se muestre la cantidad de medicamento que se debe administrar de acuerdo al peso del paciente. No olviden el título de la gráfica y el de los ejes.
   d) Si se considera que el medicamento solo se vende con receta médica y se señala en esta un frasco, ¿cuál es la dosis máxima por día que se podría administrar y cuál podría ser, en condiciones normales, el peso del paciente?
   e) Si en este medicamento se considera que 15 gotas equivalen a 1 ml, ¿aproximadamente para cuántas tomas alcanzará el frasco?
   f) Para el peso máximo para el que alcanzaría un frasco del medicamento, señalen en una tabla y en una gráfica el número de tomas (una a una), la cantidad de medicamento que se va tomando y lo que va sobrando en cada una.
   g) Analicen los datos de las gráficas y tablas elaboradas en los puntos 3 y 6; escriban la expresión algebraica que corresponde a cada una.
   h) ¿Por qué las dos gráficas son distintas a pesar que ambas se derivan del mismo caso?

Otras aplicaciones

Otra aplicación de las matemáticas es el cálculo de las dosis diarias de nutrimentos requeridas para los distintos tipos de población (niños, adultos, ancianos, deportistas, etcétera). Revisen un caso, por ejemplo, consideren la información nutrimental de tres productos de consumo humano, como una bolsa de frituras, galletas, semillas, etcétera.

- Determinen bajo qué condiciones del producto elegido (cantidad de grasas, azúcar, fibra dietética, sodio, entre otras) se pueden hacer el mismo tipo de gráficas que las del medicamento.
- Concluyan sobre la relación que existe entre el tipo de información y la diversidad de gráficas que al respecto se pueden presentar.
- Presenten cualquiera de los dos temas que hayan elegido utilizando los recursos que tengan disponibles. Por ejemplo, si tienen acceso a computadora, hagan una presentación electrónica y proyéctenla. Si no, pueden usar rotafolios o cartulinas, o quizá formas más creativas, como una cápsula radiofónica o un videodocumental.

Para que la dieta sea adecuada y equilibrada deben consumirse todos los nutrimentos en cantidades adecuadas. En caso de que exista una deficiencia, pueden consumirse suplementos, siempre bajo prescripción médica.

SENO DE UN ÁNGULO

El valor trigonométrico del ángulo se encuentra en la intersección del renglón de los grados y la columna de los minutos.

Ángulo	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145
1°	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.0320
2°	0.0349	0.0378	0.0407	0.0436	0.0465	0.0494
3°	0.0523	0.0552	0.0581	0.0610	0.0640	0.0669
4°	0.0698	0.0727	0.0756	0.0785	0.0814	0.0843
5°	0.0872	0.0901	0.0929	0.0958	0.0987	0.1016
6°	0.1045	0.1074	0.1103	0.1132	0.1161	0.1190
7°	0.1219	0.1248	0.1276	0.1305	0.1334	0.1363
8°	0.1392	0.1421	0.1449	0.1478	0.1507	0.1536
9°	0.1564	0.1593	0.1622	0.1650	0.1679	0.1708
10°	0.1736	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.1880
11°	0.1908	0.1937	0.1965	0.1994	0.2022	0.2051
12°	0.2079	0.2108	0.2136	0.2164	0.2193	0.2221
13°	0.2250	0.2278	0.2306	0.2334	0.2363	0.2391
14°	0.2419	0.2447	0.2476	0.2504	0.2532	0.2560
15°	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.2700	0.2728
16°	0.2756	0.2784	0.2812	0.2840	0.2868	0.2896
17°	0.2924	0.2952	0.2979	0.3007	0.3035	0.3062
18°	0.3090	0.3118	0.3145	0.3173	0.3201	0.3228
19°	0.3256	0.3283	0.3311	0.3338	0.3365	0.3393
20°	0.3420	0.3448	0.3475	0.3502	0.3529	0.3557
21°	0.3584	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719
22°	0.3746	0.3773	0.3800	0.3827	0.3854	0.3881
23°	0.3907	0.3934	0.3961	0.3987	0.4014	0.4041
24°	0.4067	0.4094	0.4120	0.4147	0.4173	0.4200
25°	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358
26°	0.4384	0.4410	0.4436	0.4462	0.4488	0.4514
27°	0.4540	0.4566	0.4592	0.4617	0.4643	0.4669
28°	0.4695	0.4720	0.4746	0.4772	0.4797	0.4823
29°	0.4848	0.4874	0.4899	0.4924	0.4950	0.4975
30°	0.s000	0.5025	0.s0s0	0.5075	0.5100	0.5125
31°	0.5150	0.5175	0.5200	0.5225	0.5250	0.5275
32°	0.5299	0.5324	0.5348	0.5373	0.5398	0.5422
33°	0.5446	0.5471	0.5495	0.5519	0.5544	0.5568
34°	0.5592	0.5616	0.5640	0.5664	0.5688	0.5712
35°	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854
36°	0.5878	0.5901	0.5925	0.5948	0.5972	0.5995
37°	0.6018	0.6041	0.6065	0.6088	0.6111	0.6134
38°	0.6157	0.6180	0.6202	0.6225	0.6248	0.6271
39°	0.6293	0.6316	0.6338	0.6361	0.6383	0.6406
40°	0.6428	0.6450	0.6472	0.6494	0.6517	0.6539
41°	0.6561	0.6583	0.6604	0.6626	0.6648	0.6670
42°	0.6691	0.6713	0.6734	0.6756	0.6777	0.6799
43°	0.6820	0.6841	0.6862	0.6884	0.6905	0.6926
44°	0.6947	0.6967	0.6988	0.7009	0.7030	0.7050

Ángulo	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173
46°	0.7193	0.7214	0.7234	0.7254	0.7274	0.7294
47°	0.7314	0.7333	0.7353	0.7373	0.7392	0.7412
48°	0.7431	0.7451	0.7470	0.7490	0.7509	0.7528
49°	0.7547	0.7566	0.7585	0.7604	0.7623	0.7642
50°	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753
51°	0.7771	0.7790	0.7808	0.7826	0.7844	0.7862
52°	0.7880	0.7898	0.7916	0.7934	0.7951	0.7969
53°	0.7986	0.8004	0.8021	0.8039	0.8056	0.8073
54°	0.8090	0.8107	0.8124	0.8141	0.8158	0.8175
55°	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274
56°	0.8290	0.8307	0.8323	0.8339	0.8355	0.8371
57°	0.8387	0.8403	0.8418	0.8434	0.8450	0.8465
58°	0.8480	0.8496	0.8511	0.8526	0.8542	0.8557
59°	0.8572	0.8587	0.8601	0.8616	0.8631	0.8646
60°	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732
61°	0.8746	0.8760	0.8774	0.8788	0.8802	0.8816
62°	0.8829	0.8843	0.8857	0.8870	0.8884	0.8897
63°	0.8910	0.8923	0.8936	0.8949	0.8962	0.8975
64°	0.8988	0.9001	0.9013	0.9026	0.9038	0.9051
65°	0.9063	0.9075	0.9088	0.9100	0.9112	0.9124
66°	0.9135	0.9147	0.9159	0.9171	0.9182	0.9194
67°	0.9205	0.9216	0.9228	0.9239	0.9250	0.9261
68°	0.9272	0.9283	0.9293	0.9304	0.9315	0.9325
69°	0.9336	0.9346	0.9356	0.9367	0.9377	0.9387
70°	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446
71°	0.9455	0.9465	0.9474	0.9483	0.9492	0.9502
72°	0.9511	0.9520	0.9528	0.9537	0.9546	0.9555
73°	0.9563	0.9572	0.9580	0.9588	0.9596	0.9605
74°	0.9613	0.9621	0.9628	0.9636	0.9644	0.9652
75°	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696
76°	0.9703	0.9710	0.9717	0.9724	0.9730	0.9737
77°	0.9744	0.9750	0.9757	0.9763	0.9769	0.9775
78°	0.9781	0.9787	0.9793	0.9799	0.9805	0.9811
79°	0.9816	0.9822	0.9827	0.9833	0.9838	0.9843
80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872
81°	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899
82°	0.9903	0.9907	0.9911	0.9914	0.9918	0.9922
83°	0.9925	0.9929	0.9932	0.9936	0.9939	0.9942
84°	0.9945	0.9948	0.9951	0.9954	0.9957	0.9959
85°	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974
86°	0.9976	0.9978	0.9980	0.9981	0.9983	0.9985
87°	0.9986	0.9988	0.9989	0.9990	0.9992	0.9993
88°	0.9994	0.9995	0.9996	0.9997	0.9997	0.9998
89°	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000
90°	1.0000					

COSENO DE UN ÁNGULO

El valor trigonométrico del ángulo se encuentra en la intersección del renglón de los grados y la columna de los minutos.

Ángulo	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
1°	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995
2°	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990	0.9989	0.9988
3°	0.9986	0.9985	0.9983	0.9981	0.9980	0.9978
4°	0.9976	0.9974	0.9971	0.9969	0.9967	0.9964
5°	0.9962	0.9959	0.9957	0.9954	0.9951	0.9948
6°	0.9945	0.9942	0.9939	0.9936	0.9932	0.9929
7°	0.9925	0.9922	0.9918	0.9914	0.9911	0.9907
8°	0.9903	0.9899	0.9894	0.9890	0.9886	0.9881
9°	0.9877	0.9872	0.9868	0.9863	0.9858	0.9853
10°	0.9848	0.9843	0.9838	0.9833	0.9827	0.9822
11°	0.9816	0.9811	0.9805	0.9799	0.9793	0.9787
12°	0.9781	0.9775	0.9769	0.9763	0.9757	0.9750
13°	0.9744	0.9737	0.9730	0.9724	0.9717	0.9710
14°	0.9703	0.9696	0.9689	0.9681	0.9674	0.9667
15°	0.9659	0.9652	0.9644	0.9636	0.9628	0.9621
16°	0.9613	0.9605	0.9596	0.9588	0.9580	0.9572
17°	0.9563	0.9555	0.9546	0.9537	0.9528	0.9520
18°	0.9511	0.9502	0.9492	0.9483	0.9474	0.9465
19°	0.9455	0.9446	0.9436	0.9426	0.9417	0.9407
20°	0.9397	0.9387	0.9377	0.9367	0.9356	0.9346
21°	0.9336	0.9325	0.9315	0.9304	0.9293	0.9283
22°	0.9272	0.9261	0.9250	0.9239	0.9228	0.9216
23°	0.9205	0.9194	0.9182	0.9171	0.9159	0.9147
24°	0.9135	0.9124	0.9112	0.9100	0.9088	0.9075
25°	0.9063	0.9051	0.9038	0.9026	0.9013	0.9001
26°	0.8988	0.8975	0.8962	0.8949	0.8936	0.8923
27°	0.8910	0.8897	0.8884	0.8870	0.8857	0.8843
28°	0.8829	0.8816	0.8802	0.8788	0.8774	0.8760
29°	0.8746	0.8732	0.8718	0.8704	0.8689	0.8675
30°	0.8660	0.8646	0.8631	0.8616	0.8601	0.8587
31°	0.8572	0.8557	0.8542	0.8526	0.8511	0.8496
32°	0.8480	0.8465	0.8450	0.8434	0.8418	0.8403
33°	0.8387	0.8371	0.8355	0.8339	0.8323	0.8307
34°	0.8290	0.8274	0.8258	0.8241	0.8225	0.8208
35°	0.8192	0.8175	0.8158	0.8141	0.8124	0.8107
36°	0.8090	0.8073	0.8056	0.8039	0.8021	0.8004
37°	0.7986	0.7969	0.7951	0.7934	0.7916	0.7898
38°	0.7880	0.7862	0.7844	0.7826	0.7808	0.7790
39°	0.7771	0.7753	0.7735	0.7716	0.7698	0.7679
40°	0.7660	0.7642	0.7623	0.7604	0.7585	0.7566
41°	0.7547	0.7528	0.7509	0.7490	0.7470	0.7451
42°	0.7431	0.7412	0.7392	0.7373	0.7353	0.7333
43°	0.7314	0.7294	0.7274	0.7254	0.7234	0.7214
44°	0.7193	0.7173	0.7153	0.7133	0.7112	0.7092

Ángulo	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	0.7071	0.7050	0.7030	0.7009	0.6988	0.6967
46°	0.6947	0.6926	0.6905	0.6884	0.6862	0.6841
47°	0.6820	0.6799	0.6777	0.6756	0.6734	0.6713
48°	0.6691	0.6670	0.6648	0.6626	0.6604	0.6583
49°	0.6561	0.6539	0.6517	0.6494	0.6472	0.6450
50°	0.6428	0.6406	0.6383	0.6361	0.6338	0.6316
51°	0.6293	0.6271	0.6248	0.6225	0.6202	0.6180
52°	0.6157	0.6134	0.6111	0.6088	0.6065	0.6041
53°	0.6018	0.5995	0.5972	0.5948	0.5925	0.5901
54°	0.5878	0.5854	0.5831	0.5807	0.5783	0.5760
55°	0.5736	0.5712	0.5688	0.5664	0.5640	0.5616
56°	0.5592	0.5568	0.5544	0.5519	0.5495	0.5471
57°	0.5446	0.5422	0.5398	0.5373	0.5348	0.5324
58°	0.5299	0.5275	0.5250	0.5225	0.5200	0.5175
59°	0.5150	0.5125	0.5100	0.5075	0.5050	0.5025
60°	0.5000	0.4975	0.4950	0.4924	0.4899	0.4874
61°	0.4848	0.4823	0.4797	0.4772	0.4746	0.4720
62°	0.4695	0.4669	0.4643	0.4617	0.4592	0.4566
63°	0.4540	0.4514	0.4488	0.4462	0.4436	0.4410
64°	0.4384	0.4358	0.4331	0.4305	0.4279	0.4253
65°	0.4226	0.4200	0.4173	0.4147	0.4120	0.4094
66°	0.4067	0.4041	0.4014	0.3987	0.3961	0.3934
67°	0.3907	0.3881	0.3854	0.3827	0.3800	0.3773
68°	0.3746	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
69°	0.3584	0.3557	0.3529	0.3502	0.3475	0.3448
70°	0.3420	0.3393	0.3365	0.3338	0.3311	0.3283
71°	0.3256	0.3228	0.3201	0.3173	0.3145	0.3118
72°	0.3090	0.3062	0.3035	0.3007	0.2979	0.2952
73°	0.2924	0.2896	0.2868	0.2840	0.2812	0.2784
74°	0.2756	0.2728	0.2700	0.2672	0.2644	0.2616
75°	0.2588	0.2560	0.2532	0.2504	0.2476	0.2447
76°	0.2419	0.2391	0.2363	0.2334	0.2306	0.2278
77°	0.2250	0.2221	0.2193	0.2164	0.2136	0.2108
78°	0.2079	0.2051	0.2022	0.1994	0.1965	0.1937
79°	0.1908	0.1880	0.1851	0.1822	0.1794	0.1765
80°	0.1736	0.1708	0.1679	0.1650	0.1622	0.1593
81°	0.1564	0.1536	0.1507	0.1478	0.1449	0.1421
82°	0.1392	0.1363	0.1334	0.1305	0.1276	0.1248
83°	0.1219	0.1190	0.1161	0.1132	0.1103	0.1074
84°	0.1045	0.1016	0.0987	0.0958	0.0929	0.0901
85°	0.0872	0.0843	0.0814	0.0785	0.0756	0.0727
86°	0.0698	0.0669	0.0640	0.0610	0.0581	0.0552
87°	0.0523	0.0494	0.0465	0.0436	0.0407	0.0378
88°	0.0349	0.0320	0.0291	0.0262	0.0233	0.0204
89°	0.0175	0.0145	0.0116	0.0087	0.0058	0.0029
90°	0.0000					

Tablas trigonométricas

TANGENTE DE UN ÁNGULO

El valor trigonométrico del ángulo se encuentra en la intersección del renglón de los grados y la columna de los minutos.

Ángulo	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145
1°	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.0320
2°	0.0349	0.0378	0.0407	0.0437	0.0466	0.0495
3°	0.0524	0.0553	0.0582	0.0612	0.0641	0.0670
4°	0.0699	0.0729	0.0758	0.0787	0.0816	0.0846
5°	0.0875	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022
6°	0.1051	0.1080	0.1110	0.1139	0.1169	0.1198
7°	0.1228	0.1257	0.1287	0.1317	0.1346	0.1376
8°	0.1405	0.1435	0.1465	0.1495	0.1524	0.1554
9°	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1733
10°	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914
11°	0.1944	0.1974	0.2004	0.2035	0.2065	0.2095
12°	0.2126	0.2156	0.2186	0.2217	0.2247	0.2278
13°	0.2309	0.2339	0.2370	0.2401	0.2432	0.2462
14°	0.2493	0.2524	0.2555	0.2586	0.2617	0.2648
15°	0.2679	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836
16°	0.2867	0.2899	0.2931	0.2962	0.2994	0.3026
17°	0.3057	0.3089	0.3121	0.3153	0.3185	0.3217
18°	0.3249	0.3281	0.3314	0.3346	0.3378	0.3411
19°	0.3443	0.3476	0.3508	0.3541	0.3574	0.3607
20°	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805
21°	0.3839	0.3872	0.3906	0.3939	0.3973	0.4006
22°	0.4040	0.4074	0.4108	0.4142	0.4176	0.4210
23°	0.4245	0.4279	0.4314	0.4348	0.4383	0.4417
24°	0.4452	0.4487	0.4522	0.4557	0.4592	0.4628
25°	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841
26°	0.4877	0.4913	0.4950	0.4986	0.5022	0.5059
27°	0.5095	0.5132	0.5169	0.5206	0.5243	0.5280
28°	0.5317	0.5354	0.5392	0.5430	0.5467	0.5505
29°	0.5543	0.5581	0.5619	0.5658	0.5696	0.5735
30°	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969
31°	0.6009	0.6048	0.6088	0.6128	0.6168	0.6208
32°	0.6249	0.6289	0.6330	0.6371	0.6412	0.6453
33°	0.6494	0.6536	0.6577	0.6619	0.6661	0.6703
34°	0.6745	0.6787	0.6830	0.6873	0.6916	0.6959
35°	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221
36°	0.7265	0.7310	0.7355	0.7400	0.7445	0.7490
37°	0.7536	0.7581	0.7627	0.7673	0.7720	0.7766
38°	0.7813	0.7860	0.7907	0.7954	0.8002	0.8050
39°	0.8098	0.8146	0.8195	0.8243	0.8292	0.8342
40°	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642
41°	0.8693	0.8744	0.8796	0.8847	0.8899	0.8952
42°	0.9004	0.9057	0.9110	0.9163	0.9217	0.9271
43°	0.9325	0.9380	0.9435	0.9490	0.9545	0.9601
44°	0.9657	0.9713	0.9770	0.9827	0.9884	0.9942

Ángulo	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	1.000	1.006	1.012	1.018	1.024	1.030
46°	1.036	1.042	1.048	1.054	1.060	1.066
47°	1.072	1.079	1.085	1.091	1.098	1.104
48°	1.111	1.117	1.124	1.130	1.137	1.144
49°	1.150	1.157	1.164	1.171	1.178	1.185
50°	1.192	1.199	1.206	1.213	1.220	1.228
51°	1.235	1.242	1.250	1.257	1.265	1.272
52°	1.280	1.288	1.295	1.303	1.311	1.319
53°	1.327	1.335	1.343	1.351	1.360	1.368
54°	1.376	1.385	1.393	1.402	1.411	1.419
55°	1.428	1.437	1.446	1.455	1.464	1.473
56°	1.483	1.492	1.501	1.511	1.520	1.530
57°	1.540	1.550	1.560	1.570	1.580	1.590
58°	1.600	1.611	1.621	1.632	1.643	1.653
59°	1.664	1.675	1.686	1.698	1.709	1.720
60°	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792
61°	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868
62°	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949
63°	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035
64°	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128
65°	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229
66°	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337
67°	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455
68°	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583
69°	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723
70°	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877
71°	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047
72°	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237
73°	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450
74°	3.487	3.526	3.566	3.606	3.647	3.689
75°	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962
76°	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275
77°	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638
78°	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066
79°	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576
80°	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197
81°	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968
82°	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953
83°	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255
84°	9.514	9.788	10.078	10.385	10.712	11.059
85°	11.430	11.826	12.250	12.706	13.197	13.727
86°	14.301	14.924	15.605	16.350	17.169	18.075
87°	19.081	20.206	21.470	22.904	24.542	26.432
88°	28.636	31.242	34.368	38.188	42.964	49.104
89°	57.290	68.750	85.939	114.589	171.886	343.767
90°	∞					

BLOQUE 1

Texto1. Crecimiento bacteriano

El crecimiento de un ser vivo se define como el incremento de todos los constituyentes celulares que origina el aumento de masa y de células. En el caso de las bacterias, su crecimiento dependerá de que encuentren todos los nutrientes necesarios disponibles, además de condiciones adecuadas de temperatura, salinidad, pH y espacio.

Para una especie particular de bacteria, se descubre que el patrón de crecimiento de su población se comporta de la siguiente manera cuando se le reduce su espacio con un número n de filas de bacterias. Para representar el fenómeno, se ha definido que:

# = pedazo de cerca
0 = bacteria

$n = 1$

```
# # #
#   #
# # #
```

$n = 2$

```
# # # # #
# 0     #
#       #
# 0   0 #
# # # # #
```

$n = 3$

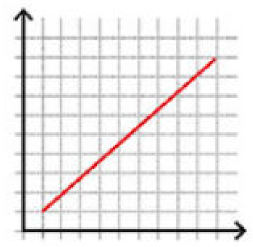
```
# # # # # # #
# 0   0     #
#           #
# 0   0   0 #
#           #
# 0   0   0 #
# # # # # # #
```

$n = 4$

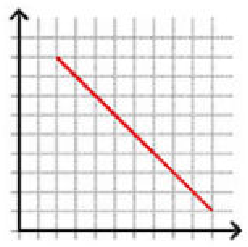
```
# # # # # # # # #
# 0   0   0     #
#               #
# 0   0   0   0 #
#               #
# 0   0   0   0 #
#               #
# 0   0   0   0 #
# # # # # # # # #
```

Pregunta 1. ¿Cuál de las siguientes gráficas describe el aumento de los pedazos de cerca conforme aumenta n?

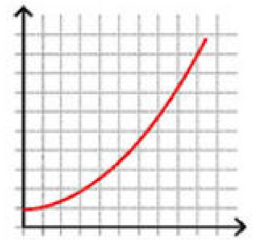
a)



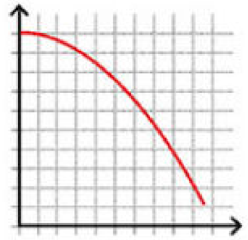
c)



b)



d)



Pregunta 2. ¿Cuál expresión matemática sirve para calcular el número de bacterias para el patrón del crecimiento de esta población?

a) $n^2 - 1$

c) $1 + n^2$

b) $1 + 2n$

d) $2n - 1$

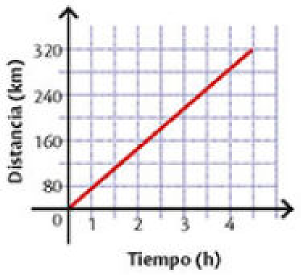
Pregunta 3. Dependiendo de la especie de bacteria su comportamiento varía y, por lo tanto, también la expresión algebraica que la representa. Por ejemplo, existe una especie donde en un valor de n el número de bacterias y el número de pedazos de cerca es el mismo. Su expresión es: $n^2 = 4n$. Para esta expresión encuentra el valor de n y escribe tu procedimiento en los siguientes espacios.

Prueba $n = 1$	Prueba $n = 3$
Prueba $n = 2$	**Prueba $n = 4$**

Por lo tanto, ____________________ es la respuesta.

Texto 2. Un viaje en automóvil

En el trayecto de un automóvil intervienen varias magnitudes que se relacionan: distancia, velocidad y tiempo del recorrido. A continuación se presenta la gráfica de un automóvil *A* que durante cierto tiempo mantiene una velocidad constante.



Pregunta 4. De acuerdo con la gráfica, ¿cuánto tiempo duró el recorrido del automóvil?

a) 3 h
c) 5 h
b) 4 h
d) El trayecto continua

Pregunta 5. ¿A qué tipo de relación de proporcionalidad corresponde la gráfica? Explica tu respuesta.

____

____

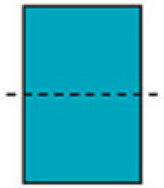
Pregunta 6. Si un automóvil *B* recorre en las mismas condiciones y el mismo trayecto del automóvil *A*, solo durante 7 horas, ¿cuál sería la tabla correspondiente? Tacha Sí o No de acuerdo con los valores que debería tener la tabla de datos de este caso.

Tiempo (h)	Distancia (km)	Sí/No	
0	1	Sí	No
1	8	Sí	No
2	120	Sí	No
3	240	Sí	No
4	320	Sí	No
5	410	Sí	No
6	490	Sí	No
7	560	Sí	No

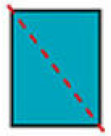
Texto 3. Globo de cantoya

La familia de Antonio construyó este fin de semana un globo de cantoya. Adriana, la hermana menor, reunió el siguiente material: 8 pliegos de papel de China (de dos colores diferentes), pegamento blanco líquido, tijeras y regla. Mientras Antonio y su papá juntaban el material para la mecha, Adriana y su mamá hicieron los primeros pasos para armar la figura:

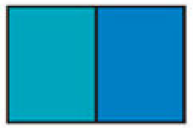
1. Cortar cada uno de los pliegos por la mitad.



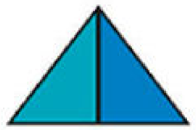
2. Cortar 8 rectángulos (4 de cada color) por la diagonal.



3. Pegar dos rectángulos en pares para obtener 4 figuras como la siguiente:



4. Pegar triángulos en pares para obtener 8 figuras como la siguiente:



Pregunta 7. Al hacer el primer corte, ¿cuántos rectángulos obtienen en total Adriana y su mamá? __________

Pregunta 8. Al observar los triángulos que habían formado cuando cortaron los rectángulos, Adriana y su mamá hacen las siguientes afirmaciones. Ayúdalas identificando cuáles de estas son verdaderas o falsas según corresponda.

Afirmación	Verdadero	Falso
a) Si dos triángulos tienen iguales sus tres ángulos, entonces los triángulos son semejantes.	Verdadero	Falso
b) Si dos triángulos rectángulos tienen igual uno de los ángulos agudos, los triángulos son semejantes.	Verdadero	Falso
c) Todos los triángulos isósceles son semejantes.	Verdadero	Falso
d) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.	Verdadero	Falso

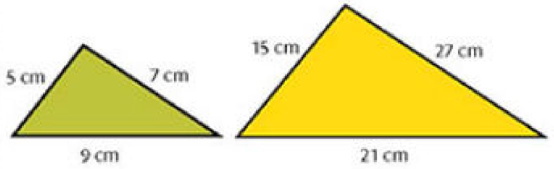
Pregunta 9. Dos de los ángulos de un triángulo miden 60° y 40°; los de otro miden 80° y 40°. Adriana asegura que estos triángulos no son semejantes, ¿está en lo correcto? ¿Por qué? Explica tu respuesta. __________

____

____

____

Pregunta 10. Como Antonio y su papá terminaron de armar la mecha rápido, iniciaron otro globo, siguiendo unos pasos diferentes de los de Adriana y su mamá, pues armarían un globo diferente; tal proeza causó diferentes dudas, por ejemplo, si los siguientes triángulos son semejantes.



Para contestarse esa pregunta, Antonio y su papá calcularon las proporciones; ayúdalos revisando sus resultados. ¿Cuáles son o no proporcionales? Encierra un sí o no, según sea el caso.

Lados del triángulo	Sí	No
21 y 7	Sí	No
15 y 5	Sí	No
27 y 9	Sí	No

Por lo tanto, los triángulos son: ____________________.

BLOQUE 2

Texto 1. Los portarretratos

Alicia vende portarretratos con diseños novedosos hechos con materiales reciclados, como latas, envases de refresco, periódico, cartón, etcétera. Para el primer diseño que hizo utilizó pedazos de cartón adornado con flores y trozos de diferentes papeles. Lo que hizo Alicia fue lo siguiente:

A un cuadrado que funcionaría como base para la fotografía (fig. 1) le aumentó 7 cm de largo y 3 cm de ancho, con estos cambios Alicia formó un rectángulo (fig. 2).

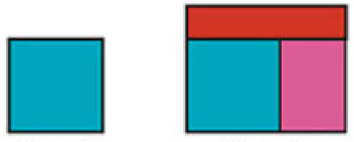


figura 1 figura 2

Pregunta 1. ¿Cuál es el área del rectángulo que formó Alicia?

a) $x^2 + 4x + 21$

b) $x^2 - 4x - 21$

c) $x^2 - 10x - 21$

d) $x^2 + 10x + 21$

Pregunta 2. El primer diseño de portarretrato que hizo Alicia fue un éxito, la gente poco a poco le hizo pedidos, aunque algunos solicitaron cambios en el modelo inicial, como un aumento en las extensiones, por ejemplo, un rectángulo que solicitaron tenía un área de $x^2 + 9x + 18$, ¿cuántos centímetros se le aumentó de largo y cuántos de ancho? Explica tu respuesta. ______________________

____

Pregunta 3. Si el área del rectángulo $x^2 + 9x + 18$ es igual a 40 cm^2, ¿cuántos centímetros mide de largo y cuántos de ancho?

a) Ancho: 2 cm
Largo: 9 cm

b) Ancho: 2 cm
Largo: 11 cm

c) Ancho: 3 cm
Largo: 6 cm

d) Ancho: 3 cm
Largo: 9 cm

Texto 2. La casa de mi abuela

Mi abuela ha vivido varios años en la Ciudad de México, pero desde hace unos meses ha decidido regresar al estado de Hidalgo de donde es oriunda. Este fin de semana fuimos a conocer su nuevo hogar, mi papá dice que no es tan nuevo, pues cuando él era niño visitó y jugó mucho en esa casa.

Durante el camino, mi papá nos contó lo que más recordaba de aquella casa: la loseta de la cocina formada por triángulos del mismo tamaño con dos colores diferentes que, a su vez, formaban un cuadrado y el jardín de forma rectangular lleno de verdura.

Pregunta 4. Mi papá recuerda que el ancho del jardín de forma rectangular media 40 m y su diagonal 50 m. ¿Cuál era la medida del largo del jardín?

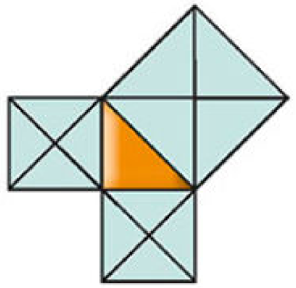
a) 30 m

b) 40 m

c) 50 m

d) 60 m

Pregunta 5. Mi papá cuenta que mientras él esperaba que salieran las galletas del horno, observaba la loseta de la cocina y le gustaba localizar un triángulo rectángulo y en cada uno de los lados de éste un cuadrado. A continuación se presenta la figura ampliada de la descripción hecha por mi papá.



Como se puede apreciar, el cuadrado mayor está formado por tantas piezas triangulares como las que hay entre los otros dos. ¿Cuál es la expresión del área del cuadrado más grande, con respecto a los otros dos cuadrados? Explica tu respuesta. ______________________

____

Pregunta 6. Después de haber planteado el problema de los azulejos, la familia planteó diferentes suposiciones con triángulos rectángulos. Revisa cuáles son correctas o incorrectas, según sea el caso, e indícalo en la última columna con una *C* para correctas o una *I* para incorrectas.

Suposiciones	C	I
a) Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 cm respectivamente, la hipotenusa medirá 100 cm.		
b) Si los catetos de un triángulo miden 3 y 4 cm respectivamente, la hipotenusa por consiguiente medirá 5 cm.		
c) Si el cateto de un triángulo rectángulo mide 8 cm y la hipotenusa mide 10 cm. El otro cateto tendrá un valor de 6 cm.		

Texto 3. Ruleta

El maestro de matemáticas nos pidió que construyéramos con materiales de nuestra elección una ruleta con 8 espacios enumerados. El equipo de Jorge utilizó una caja de pizza, dibujó y recortó un círculo con las divisiones solicitadas, y en el colocaron una tachuela con una flecha.

Pregunta 7. ¿Cuál es el espacio muestral que puede definirse con la ruleta?

____

Pregunta 8. Por equipos y con las ruletas en la mesa, el maestro nos pidió que contestáramos las siguientes preguntas. Revisa los resultados que presentó el equipo de Jorge, tacha *verdadero* o *falso*, según corresponda.

Al girar la ruleta, ¿qué probabilidad existe de que se detenga en el número…

	Probabilidad		
a) 4?	$\frac{1}{4}$	Verdadero	Falso
b) 5?	$\frac{1}{8}$	Verdadero	Falso
c) en un número menor a 3?	$\frac{3}{8}$	Verdadero	Falso
d) en un número múltiplo de 3?	$\frac{3}{2}$	Verdadero	Falso

Pregunta 9. El equipo de Jorge está estudiando los dos siguientes eventos:

Evento A. Que la ruleta se detenga en un múltiplo de 2.
Evento B. Que la ruleta se detenga en número impar.

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra *P*(*A* o *B*)?

a) La probabilidad es de $\frac{1}{8}$

b) La probabilidad es de $\frac{3}{8}$

c) La probabilidad es de $\frac{1}{2}$

d) La probabilidad es de 1

Pregunta 10. Al aplicar la probabilidad de un evento compuesto al obtener el espacio muestra y la probabilidad particular de cada uno de los eventos, se observa que hay elementos en común, ¿qué se puede concluir? Explica tu respuesta. ______________________

____

BLOQUE 3

Texto 1. Juguetería

Josefina está en el quinto semestre de la carrera de arquitectura. Como proyecto debe diseñar y construir la maqueta de una juguetería. El edificio tendrá una forma rectangular y en la parte del techo estará estructurado por cuatro triángulos.

Para la parte del techo Josefina quiere utilizar palitos de madera, con estos planea armar triángulos isósceles. La base de los triángulos medirá 8 cm y tendrán una altura de 12 cm.

Pregunta 1. Al momento de armar el techo Josefina se da cuenta de que los triángulos quedaron muy pequeños. Para solucionar el problema decide construir otros aumentando 2 cm de la base, de forma que los triángulos sigan siendo semejantes. ¿Cuánto deberá aumentar la altura de estos triángulos isósceles?

a) 11 c) 14

b) 12 d) 15

Pregunta 2. Josefina decide utilizar triángulos equiláteros de 8 cm, medida que después de un tiempo decide aumentar a 2 cm por lado. Ella asegura que al hacer eso tendrá que disminuir menos de 2 cm la altura del triángulo. ¿Josefina tiene o no razón? ¿Por qué? ___________

____

Pregunta 3. Si los lados de un triángulo rectángulo que podría utilizar Josefina miden 3, 4 y 5 cm respectivamente. Si aumentamos su hipotenusa a 3 cm, de forma que los triángulos sean semejantes, ¿cuánto deberán medir sus catetos?

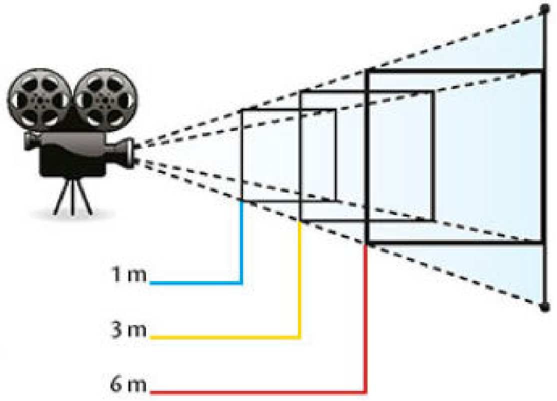
a) 4.5 cm y 5.5 cm c) 3.8 cm y 7.5 cm

b) 4.8 cm y 6.4 cm d) 1.8 cm y 2.5 cm

Texto 2. Proyectores

Los instrumentos de proyección están diseñados para formar la imagen de un objeto sobre un plano de referencia. Normalmente están constituidos por un sistema convergente, de manera que se obtiene una imagen real a partir también de un objeto real.

Cuando se proyecta una película, el área de la imagen depende de la distancia entre el proyector y la pantalla.



Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1	3	6	9
Área de la imagen (m^2)	4	40	144	324

Pregunta 4. ¿Cuál es la expresión algebraica que muestra la relación entre las distancias y las áreas? ___________

____

Pregunta 5. Verifiquen los datos de la siguiente tabla escribiendo sobre la línea correcto o incorrecto, según corresponda.

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	2	4	7	8
Área de la imagen (m^2)	36	64	196	246
Correcto/ Incorrecto	______	______	______	______

Pregunta 6. ¿A qué distancia se debe de colocar el proyector de manera que el área de la imagen sea de 207 m^2?

a) 6.18 c) 8.13

b) 7.19 d) 9.12

Texto 3. Monedas

Mi abuelo dice que cuando él toma decisiones rápidas está en lo cierto 60% de las veces; si se toma tiempo para analizar la situación y toma la decisión más cuidadosamente, podría estar en lo cierto 70%. Sin embargo, 10% extra es más exacto. Generalmente, cuando se quiere tomar una decisión entre dos posibilidades se suele recurrir a lanzar una moneda al aire, es decir, uno supone que la probabilidad de que salga águila o sol es la misma.

Pregunta 7. Si se tira al aire moneda tres veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres águilas?

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{8}$

Pregunta 8. Si lanzamos dos monedas al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que en las dos salga águila?

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{8}$

Pregunta 9. Si ahora se lanzan simultáneamente un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga águila y el número 2? Explica tu respuesta. ___________

____

____

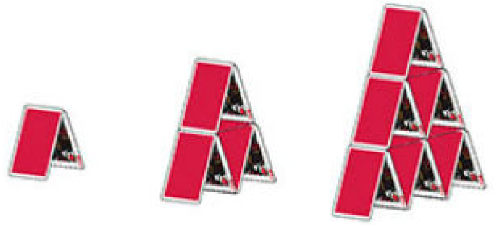
____

Pregunta 10. Si se lanzan simultáneamente dos dados, uno negro y uno verde, ¿cuál es el espacio muestra que corresponde a este tipo de evento? Escríbelo en el siguiente espacio.

BLOQUE 4

Texto 1. Torres de naipes

Actualmente existen matemáticos que se dedican a explorar la relación entre la geometría de figuras en dos y tres dimensiones, que consiste en una idea muy simple: varias copias de una misma figura en la que se pueden o no hacer cortes simétricos, de modo que unas piezas encajan con otras para formar un objeto tridimensional. Un ejemplo es la construcción de figuras con naipes, como la sucesión que se presenta en la siguiente imagen.



Pregunta 1. Elige la expresión que sirve para calcular el número de naipes necesarios para construir la enésima figura de la sucesión.

a) $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$

b) $n^2 - n + 2$

c) $\frac{2}{3}n^2 + \frac{4}{3}n$

d) $\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

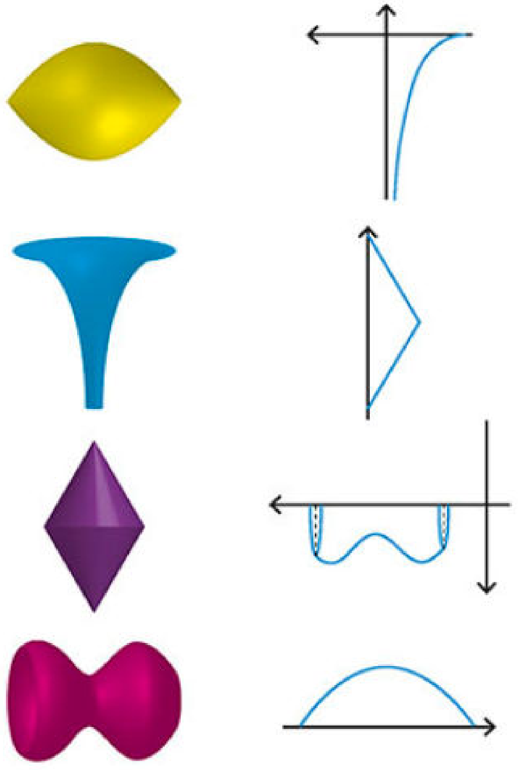
Pregunta 2. Siguiendo esta sucesión, ¿a qué término corresponde la figura construida con 100 naipes? Argumenta tu respuesta. ______________________

____

Texto 2. Cuerpos de revolución

Un cuerpo de revolución es un cuerpo geométrico obtenido a partir de una figura plana que gira alrededor de un eje. Tres cuerpos de revolución son los que aparecen de manera frecuente: el cilindro, el cono y la esfera, pero no son los únicos.

Pregunta 3. Relaciona mediante una línea, la figura plana rotada y el sólido generado por dicha rotación.



Texto 3. Topógrafo

Un topógrafo utiliza un instrumento denominado *teodolito* para medir el ángulo de elevación entre la cima de una montaña y el nivel del suelo. Al medir desde un punto situado a una distancia x de la base de la montaña encuentra que el ángulo de elevación es de 30°. Al situarse a una distancia de 5 km más lejos de la base de la montaña encuentra que el ángulo de elevación es de 25°.

Pregunta 4. De acuerdo con la información proporcionada y considerando que h representa la altura de la montaña y x la distancia entre el primer punto de medición y la base de la montaña, ¿cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son ciertas?

a) $\tan 30° = \frac{h}{x}$ y $\tan 25° = \frac{h}{(x+5)}$

b) $\operatorname{sen} 30° = \frac{h}{x}$ y $\operatorname{sen} 25° = \frac{h}{(x+5)}$

c) $\tan 25° = \frac{h}{x}$ y $\tan 30° = \frac{h}{(x+5)}$

d) $\cos 25° = \frac{h}{x}$ y $\cos 30° = \frac{h}{(x+5)}$

Pregunta 5. Utiliza el par de ecuaciones anterior para determinar la altura h de la montaña y anota el resultado.

____

Pregunta 6. Lee las siguientes afirmaciones. Indica con una V si es verdadera y con una F si es falsa.

a) La tangente (tan o tg) es la razón trigonométrica del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. ( )

b) Se puede conocer la distancia entre el primer punto de observación con el teodolito usando el teorema de Pitágoras, una vez encontrada la altura de la montaña. ( )

c) Las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante pueden escribirse en términos del seno y/o el coseno. ( )

d) La gráfica de la función seno presenta simetría axial respecto al eje coordenado y. ( )

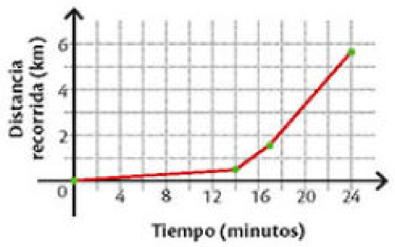
Texto 4. De paseo en carretera

Joaquín salió el día de hoy a dar un paseo por un camino que consta de diferentes partes: un tramo en bajada en el que alcanzó su máxima velocidad; un tramo en subida, en el que avanzó muy lento; y un tramo plano en el que fue un poco más rápido. No se sabe en qué orden pasó por estos caminos; sin embargo, en la siguiente gráfica se muestra la distancia recorrida por Joaquín, por unidad de tiempo, durante su trayecto.

Pregunta 7. Analiza la gráfica y determina el orden en el que Joaquín hizo su recorrido. ______________________

____

____



Pregunta 8. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta (C) y cual es incorrecta (I). Escríbelo en el paréntesis.

a) La distancia recorrida por Joaquín durante todo el trayecto fue de 6 km. ( )

b) La duración total del recorrido fue de 30 minutos. ( )

c) La distancia recorrida por Joaquín durante los primeros 16 minutos fue de 2 km. ( )

d) En cada uno de los tres tramos del recorrido, la velocidad de Joaquín fue diferente y, además, constante (en cada tramo). ( )

Texto 5. Prueba de matemáticas

La siguiente tabla muestra los resultados de una prueba de matemáticas que se aplicó a diez alumnos de tercero de secundaria de la escuela Venustiano Carranza.

Alumno	Javier	Darío	María	Aarón	Gabriel
Calificación obtenida	10	9.5	6	5.5	8

Alumno	Natalia	Sandra	Miguel	Samanta	Fernanda
Calificación obtenida	8.5	8.5	7	7.5	9.5

Pregunta 9. ¿Qué alumno se alejó más del promedio y cuál fue su desviación? Justifica tu respuesta.

a) Javier, con una desviación de 2.

b) María, con una desviación de 2.5.

c) Fernanda y Darío, con una desviación de 1.5.

d) Aarón, con una desviación de 2.5.

Pregunta 10. Indica con una *V* si la afirmación es verdadera y con una *F* si es falsa.

a) El rango del conjunto de las calificaciones obtenidas por los alumnos de tercero de secundaria es 4. ( )

b) La media del conjunto de calificaciones es el promedio de las desviaciones absolutas. ( )

c) La desviación media del conjunto finito de números que comprenden las calificaciones de los alumnos se obtiene a partir de la suma de todos los valores, dividido entre el número de sestudiantes. ( )

d) La desviación media del conjunto de las calificaciones obtenidas por los alumnos de tercero de secundaria es 1.2. ( )

BLOQUE 5

Texto 1. El circo

Un circo acaba de llegar a la ciudad y anunció que el precio de los boletos será de $60.00 por adulto y $30.00 por niño. Al finalizar el primer día de funciones se vendieron 372 boletos, con lo que se recaudaron $14 910.00. En el segundo día de funciones se vendió la misma cantidad de boletos, pero esta vez se recaudó $17 160.00.

Pregunta 1. Para determinar el número de boletos que se vendieron de cada tipo (adulto y niño) durante los dos días de funciones, es necesario plantear expresiones algebraicas, que involucren alguno de los siguientes tres tipos ecuaciones: de primer grado, de segundo grado o sistema de ecuaciones lineales. Con base en la información proporcionada, determina qué tipo de ecuación involucra la solución del ejercicio, y plantea las ecuaciones correspondientes a cada día de funciones. Anota tu procedimiento y respuesta a continuación.

Pregunta 2. ¿Qué día se vendieron más boletos de adulto? ¿Cuántos boletos fueron?

a) El primer día y se vendieron 125 boletos de adulto.

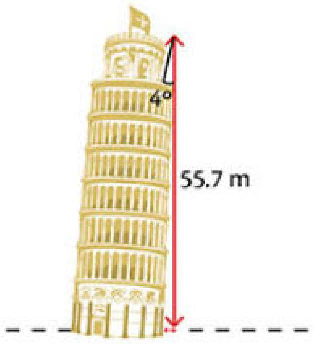
b) El primer día y se vendieron 200 boletos de adulto.

c) El segundo día y se vendieron 125 boletos de adulto.

d) El segundo día y se vendieron 200 boletos de adulto.

Texto 2. La torre de Pisa

La torre de Pisa es uno de los monumentos más famosos de Italia, esto se debe a la peculiaridad de su inclinación que alcanza los 4° con respecto a la vertical. La torre perdió su posición vertical apenas comenzó a construirse en agosto de 1173 y tiene una altura de 55.7 m desde uno de sus extremos hasta el suelo. Un diagrama de la torre se muestra en la siguiente figura.



Pregunta 3. Considerando que la base de la torre de Pisa se puede aproximar a un círculo de 10 metros de radio y que $\pi = 3.1416$, ¿cuál es el volumen del cilindro que formaría, la torre si estuviera en posición vertical?

a) 1 754.14

b) 3 508.28

c) 17 541.43

d) 22 741.43

Pregunta 4. Indica con una *V* si la afirmación es verdadera y con una *F* si la afirmación es falsa.

a) Con la información dada, es posible determinar la superficie del cilindro que forma la torre de Pisa. ( )

b) La relación entre el volumen *V* de un cilindro y el área lateral *A* del mismo está dada por la expresión: $V = \frac{r}{2A}$ ( )

c) El volumen de un cilindro tiene una relación lineal con el radio de su base.

( )

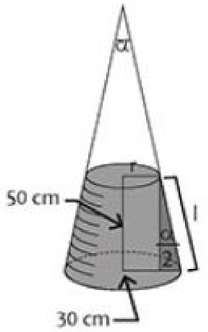
d) Al hacer un corte a la torre de Pisa en uno de los 8 niveles que posee, la figura geométrica encontrada es un rectángulo.

( )

Pregunta 5. Sabiendo que para la construcción de la superficie lateral de la torre de pisa se emplearon alrededor de 7 500 toneladas de material, y considerando que esta superficie es homogénea, es decir, que el material empleado en cualquier parte de la superficie es el mismo; encuentra el peso por metro cuadrado de material. Anota el procedimiento y resultado enseguida.

Texto 3. Material de laboratorio

El matraz de Erlenmeyer es uno de los materiales de laboratorio hechos de vidrio más utilizados. Es un recipiente cónico de base ancha y cuello estrecho. Existen de diversas capacidades y con algunas variaciones. Suelen incluir unas pocas marcas para saber aproximadamente el volumen contenido. A continuación se presentan una imagen real y una simplificada de dicho instrumento de laboratorio.



Pregunta 6. Considerando que el ángulo $\alpha = 60°$, ¿cuál de las siguientes expresiones permite calcular el valor del radio r de la circunferencia que forma el líquido en la superficie?

a) $\tan 30° = \frac{10 - r}{13}$

b) $\tan 60° = \frac{10 - r}{13}$

c) $\operatorname{sen} 30° = \frac{13 - r}{10}$

d) $\cos 60° = \frac{13 - r}{10}$

Pregunta 7. Indica cual de las siguientes afirmaciones es correcta (C) y cual es incorrecta (I).

a) Si las marcas del recipiente se encuentran a la misma distancia unas de otras, se requiere la misma cantidad de sustancia para pasar de una a otra.

( )

b) Con la información dada es posible determinar el volumen de la sustancia contenida en el recipiente.

( )

c) Un recipiente cilíndrico cuya sección transversal mide 10 cm de radio se llena a la misma altura que el matraz Erlenmeyer, tendrá una mayor cantidad de sustancia.

( )

d) El volumen del matraz Erlenmeyer depende linealmente del valor del radio de su base.

( )

Texto 4. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

La ecuación que expresa la variación de la posición respecto al tiempo, en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es:

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Donde x, v_0, t y a representan la distancia recorrida por un objeto, su velocidad inicial, el tiempo y la aceleración del objeto, respectivamente.

Pregunta 8. Si un motociclista parte del reposo ($v_0 = 0$) y viaja en línea recta con una aceleración constante de 10 $\frac{m}{s^2}$, durante 18 s, ¿qué distancia habrá recorrido en ese tiempo? Anota el procedimiento y resultado en el siguiente espacio.

Pregunta 9. De las siguientes afirmaciones elige la que es correcta en el caso de movimiento rectilíneo uniforme.

a) La distancia recorrida por un objeto es una función lineal del tiempo.

b) La distancia recorrida por un objeto no depende de la velocidad inicial de éste.

c) La distancia recorrida por un objeto es una función cuadrática del tiempo.

d) La distancia recorrida por un objeto no depende de la aceleración de éste.

Texto 5. Dados

Pregunta 10. Al lanzar dos dados durante una partida de serpientes y escaleras, se han obtenido los resultados R1 y R2, para cada uno de ellos. ¿Cuál de las siguientes opciones, muestra resultados igualmente probables para el lanzamiento?

a) R1= que la suma de ambos dados sea par;
R2= que la suma de ambos dados sea 2.

b) R1= que la suma de ambos dados sea 6;
R2= que la suma de ambos dados sea 7.

c) R1=que ambos caigan un número impar;
R2= que la suma de ambos dados sea 11.

d) R1= que ambos dados caigan 6;
R2= que la suma de ambos dados sea 7.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía recomendada para el alumno

Cesaroli, Ana, *Los diez magníficos*, México, SEP/Ediciones Maeva, 2005 (Biblioteca del Aula, Serie Espejo de Urania).

Livio, Mario. *La ecuación jamás resuelta*. Barcelona, Ariel, 2007.

Moreno, Ricardo y José M. Vegas, *Una historia de las matemáticas para jóvenes, desde la Antigüedad hasta el Renacimiento*, Madrid, Nivola, 2006.

Sardar, Ziauddin, Jerry Ravetz y Borin Van Loon, *Matemáticas. Una guía gráfica*, Madrid, Paidós, 2011.

Sitios de internet recomendados para el alumno

Ejercicios interactivos
http://www.educaplus.org/play-44-Fracciones.html

Instituto de Matemáticas, UNAM
http://arquimedes.matem.unam.mx/Descartes4/
Aplicaciones básicas para manipular y observar el efecto que las modificaciones de los parámetros tienen sobre las gráficas y las fórmulas.

Aplicaciones didácticas
http://www.aplicaciones.info

(Consultado el 2 de diciembre de 2016).

Bibliografía recomendada para el profesor

Alsina, Claudi, Carme Burgués, Josep María Fortuny, Joaquim Giménez y Montserrat Torra, *Enseñar matemáticas*, España, Graó, 2007.

Ávila, Alicia (coordinadora), *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. México, SEP, Dirección General de Investigación Educativa de la Secretaría de Educación Básica y Normal, 2004.

Azuela, Ana, *El talento de los niños*, México, Trillas, 2010.

Bernabeu, Natalia y Andy Goldstein, *Creatividad y aprendizaje. El juego como herramienta pedagógica*. Madrid, Narcea, 2009.

Campos, Miguel Ángel, *Construcción del conocimiento en el proceso educativo*, México, UNAM, 2005.

INEE, *PISA para docentes: La evaluación como oportunidad de aprendizaje*, México, 2005.

Parra, Cecilia e Irma Saiz (compiladoras), *Didáctica de matemáticas*, México, Paidós educador, 2010.

Sánchez, Lizbeth y Rafael Andrade, *Habilidades intelectuales. Una guía para su potenciación*, México, Alfaomega, 2010.

SEP, *Antología. Matemáticas. Educación Básica. Secundaria*, México, 2006.

Sola, Carlos, *Aprendizaje basado en problemas*. México, Trillas, 2005.

Zabala, Antoni, *La práctica educativa. Cómo enseñar*, México, Graó, 2008.

Sitios de internet recomendados para el profesor

Mi ayudante de matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
http://miayudante.upn.mx/
Auxiliar didáctico de matemáticas. Es un buscador de actividades.

Ministerio de Educación, Gobierno de España
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
Recursos interactivos de matemáticas

Revista de investigación en didáctica de las matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
Trabajos de orientación e interés para los profesores de educación secundaria

Revista Mexicana de Investigación Educativa
www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php
Artículos de investigación educativa en todas las áreas

(Consultado el 2 de diciembre de 2016).

Bibliografía consultada

Clemens, Stanley, *et al.*, *Geometría*, EU, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

Courant, Richard y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, Fondo de Cultura Económica, 2002.

D´Amore, Bruno, *Bases filosóficas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*, Madrid, Reverté, 2005.

Hitt, Fernando, *Funciones en contexto*, México, Prentice Hall, 2002.

SEP, *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, México, 2001.

SEP, *Plan de estudios 2011. Educación Básica. Secundaria*, México, 2011.

SEP, *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Matemáticas. Educación Básica. Secundaria*, México, 2011.

Santos, Luz Manuel, *La función cuadrática. Enfoque de resolución de problemas*, México, Trillas, 2010.

Torija, Rosalina, *Arquímedes, alrededor del círculo*, Madrid, Nivola, 2003 (La matemática en sus personajes).

MatemáticaMente 3. Consolidación de competencias. Serie ALTernativas es una obra diseñada con el propósito de desarrollar en los estudiantes el pensamiento abstracto. Así, en este último curso, los alumnos consolidarán de manera ágil y sencilla las competencias para la vida y serán capaces de:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Estas competencias, necesarias para desempeñarse en la sociedad actual, dotarán a los alumnos de habilidades y conocimientos que les permitirán funcionar de manera efectiva en contextos reales y obtener un desarrollo personal significativo.

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com

ISBN 978-607-32-3285-2